Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2013-2014
Série et transformations (L2, SPIAAPR)

Feuille de TD n^0 2 : Séries numériques (suite)

Exercice 1 En utilisant la comparaison à des intégrales impropres, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\log n}$ diverge et que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ converge.

Exercice 2 Etablir si les séries suivantes sont convergentes :

(a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$,

(b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n}\dfrac{n}{2^n}$,

(c) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$,

(d) $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n n+2}{n^2}$.

Exercice 3 On considère la série numérique complexe $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = \dfrac{i^n}{n}$.

(a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque terme u_n, c'est-à-dire, écrire $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

(b) Etudier la convergence des séries réelles $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$. En déduire si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou diverge.

(c) Est-ce que la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge ?

Exercice 4 Déterminer la nature des séries de nombres complexes $\sum_{n\geq 1} u_n$ suivantes, où :

(a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+i}$,

(b) $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$ est fixé.