

Feuille de TD n⁰ 3 : Séries entières

Exercice 1 Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^3} & \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} z^n \\
 \text{(c)} \quad \sum_{n \geq 0} i^n z^n & \text{(d)} \quad \sum_{n \geq 0} (1+ni) z^n \\
 \text{(e)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} & \text{(f)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2^n n^n}{(n+1)!} (z-i)^n
 \end{array}$$

Exercice 2 .

- Déterminer et dessiner le disque de convergence des séries entières (d), (e) et (f) de l'exercice 1.
- Déterminer l'intervalle de convergence des séries entières de variable réelle suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}.$$

Exercice 3 On considère les séries entières de variable réelle suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} & \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \\
 \text{(c)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^n & \text{(d)} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n} \\
 \text{(e)} \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{n+1} &
 \end{array}$$

- Déterminer la série entière dérivée des séries entières de variable réelle (a), (b) et (c).
- Déterminer la série entière primitive des séries entières de variable réelle (d) et (e).
- Déterminer le rayon de convergence (a), (b) et (c) ainsi que des leurs séries entières dérivées.
- Déterminer la somme de la série entière (a).

Exercice 4 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^n}$ converge pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > 1$. Calculer sa somme en fonction de x .