Université de Lorraine – Metz — Année universitaire 2013-2014
Séries et transformations (L2, SPIAAPR)

Feuille de TD n^0 4 : Séries de Taylor d'une fonction

Exercice 1 (a) Développer en série entière en 0 la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

(b) En considérant la série entière primitive de la série de la partie (a), déduire le développement en série de Maclaurin de la fonction $\arctan x$. Spécifiquer l'intervalle de convergence de cette série.

(c) Développer en série de Maclaurin la fonction $\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

Exercice 2 (Dans les questions (a) et (b) ci-dessous, on suppose que la fonction $\cos x$ soit développable en séries de Taylor en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$).

(a) Déterminer le développement en séries de Taylor de la fonction $\cos x$ en $x_0 = 0$ and en $x_0 = \pi$.

(b) Déterminer le rayon de convergence des séries déterminées dans (a).

(c) En estimant le reste dans la formule de Taylor de $\cos x$, vérifier que cette fonction est bien développable en série de Taylor en $x_0 = 0$ and $x_0 = \pi$.

(d) Déduire de ce qui précede la série de Maclaurin de la fonction $\sin x$ ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 3 En utilisant la formule de Taylor avec reste en forme intégrale, montrer que les fonctions

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sont développables en série entières en 0. Déterminer les rayons de convergence.

Exercice 4 Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y" - x(1+x)y' + y = 0$$

qui sont développables en série entière en 0.