

**Feuille de TD n<sup>o</sup> 5 : Séries de Fourier**

**Exercice 1** On considère les fonctions  $2\pi$ -périodiques  $f$ ,  $g$  et  $h$  sur  $\mathbb{R}$  définies sur  $[-\pi, \pi[$  comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \\ g(x) &= x, \\ h(x) &= |\sin x|. \end{aligned}$$

- (a) Tracer les graphes de  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
- (b) Montrer que  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont  $C^1$  par morceaux.
- (c) Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de  $f$ ,  $g$  et  $h$ . Ecrire les séries de Fourier correspondantes.
- (d) Calculer la somme des séries de Fourier de  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
- (e) Dédurre les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} &= \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} &= \frac{\pi-2}{4}. \end{aligned}$$

- (f) On considère la série de Fourier de  $h$  pour  $x \in [0, \pi]$ . Par dérivation et intégration, déterminer un développement en fonctions trigonométriques de la fonction  $\cos x$ . Comparer les résultats obtenus.

**Exercice 2** Au moyen du théorème de Plancherel, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$