Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2014-2015

Séries et transformations (L2, SPI-EE-APR)

Feuille de TD n^0 1 : Quelques rappels

Exercice 1 On considère les suites numériques (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n), où :

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+\frac{1}{2^n} \qquad (n\in\mathbb{N}),\\
b_n &= \frac{n}{n^2+2} \qquad (n\in\mathbb{N}^*)\\
c_n &= 1+2^n i \qquad (n\in\mathbb{N}),\\
d_n &= \frac{1+e^{in\theta}}{1+in} \qquad (n\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes. Sont-elles bornées ?

(b) Déterminer le module $|c_n|$ du nombre complexe c_n. Est-ce que la suite (c_n) est bornée ?

(c) Est-ce que la suite (d_n) est bornée ?

Exercice 2 (a) Soient $z = 4-3i$ et $w = -1+3i$.
Ecrire $z+w$, zw et $\dfrac{z}{w}$ sous la forme $a+bi$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Simplifier les nombres complexes $e^{-513\pi i}$ et $\left(e^{i\pi/3}\right)^{3/2}$.

(c) Déterminer le module et le complexe conjugué de $4e^{i\theta}$, où $\theta\in\mathbb{R}$ est fixé.

Exercice 3 Calculer, si possible, la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ lorsque :

(a) $a_n = \dfrac{n^2+3}{2n+1}$,

(b) $a_n = \dfrac{1-n}{e^n+1}$,

(c) $a_n = 1+\dfrac{n-1}{n+1}\,i$,

(d) $a_n = \dfrac{e^n}{n}$.