

Feuille de TD n^o 2 : Séries numériques. I

Exercice 1 Ecrire les quatre premiers termes de la série de terme générale u_n où

$$u_n = \frac{n-1}{2n^2+1} \quad \text{and} \quad u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}.$$

Exercice 2 Ecrire le terme général u_n des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \\ & 2\frac{3}{4} + 4\frac{4}{9} + 6\frac{5}{16} + 8\frac{6}{25} + \dots \end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. En déduire la nature de la série.

Exercice 4 Pour chacune des séries suivantes, déterminer une série de comparaison permettant de décider de la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{2^n - 1}{3^n + n}.$$

Exercice 5 Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} 2^{1-n}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}$

Exercice 6 On considère la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

- (a) Ecrire les quatre premiers termes de la série.
- (b) Ecrire le terme général de la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$.
- (c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument.
- (d) Est-ce que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge ?

Exercice 7 Déterminer la nature des séries de terme général u_n égal à :

- (a) $\frac{n^3}{3^n}$
- (b) $\frac{2+n^2}{n!}$
- (c) $\left(\frac{n+3}{3n+4}\right)^n$
- (d) $\frac{3^n}{4^n+n}$
- (e) $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$
- (f) $\frac{n+1}{(\sqrt{2})^n}$