Feuille de TD n^0 3 : Séries numériques (suite)

Exercice 1 En utilisant la comparaison à des intégrales impropres, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n\log n}$ diverge et que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ converge.

Exercice 2 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

(a) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{3n+1}$,

(b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{n}{3^n}$,

(c) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$,

(d) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 3 On considère la série numérique complexe $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{i^n}{n}$.

(a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque terme u_n, c'est-à-dire, écrire $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

(b) Etudier la convergence des séries réelles $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$. En déduire si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ou diverge.

(c) Est-ce que la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ converge ?

Exercice 4 Déterminer la nature des séries de nombres complexes $\sum_{n\geq 1} u_n$ suivantes, où :

(a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}(1+i)}$,

(b) $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$ est fixé.