

Feuille de TD n° 4 : Séries entières.

Exercice 1 1. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2} & \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n+2}} z^n \\ \text{(c)} \quad \sum_{n \geq 0} i^n z^n & \text{(d)} \quad \sum_{n \geq 0} (n+i) z^n \\ \text{(e)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} & \text{(f)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} (z-i)^n \end{array}$$

2. Déterminer et dessiner le disque de convergence des séries entières (d), (e) et (f).

Exercice 2 Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière de variable réelle

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2n-1)^n}{n^n} (2x-1)^n.$$

Exercice 3 On considère les séries entières de variable réelle suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} & \text{(b)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \\ \text{(c)} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n} & \text{(d)} \quad \sum_{n \geq 0} x^{n+1} \end{array}$$

- (1) Déterminer la série entière dérivée des séries (a) et (b).
- (2) Déterminer la série entière primitive des séries (c) et (d).
- (3) Calculer le rayon de convergence des séries entières (a) et (b) ainsi que celui de leurs séries dérivées.
- (4) Calculer la somme de la série entière (a).

Exercice 4 Déterminer pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^n}$ est convergente. Pour ces x , calculer la somme de la série en tant que fonction de x .