

Feuille de TD n° 5 : Séries de Fourier

Exercice 1 On considère les fonctions 2π -périodiques f et g sur \mathbb{R} définies sur $[-\pi, \pi[$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
$$g(x) = |\sin x|.$$

- (a) Tracer les graphes de f et g .
- (b) Montrer que f et g sont C^1 par morceaux.
- (c) Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de f et g . Ecrire les séries de Fourier correspondantes.
- (d) Calculer la somme des séries de Fourier de f et g .
- (e) Dédire les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2},$$

Exercice 2 Au moyen du théorème de Plancherel, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$