Université de Lorraine – Metz
Séries et transformations (L2 EE-APR)

Année universitaire 2015-2016
A. Pasquale

Intégrales

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I lorsque : 1) F est dérivable sur I ; 2) $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Si F est une primitive de f, alors toute primitive de f est de la forme $F + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

On dit que f est *intégrable* si elle admet une primitive. Dans ce cas on note $\int f(x)\,dx$ l'une quelconque des primitives de f, définie à une constant près que l'on écrit toujours explicitement. $\int f(x)\,dx$ s'appelle l'*intégrale indéfinie* de f.

Soit F une primitive de f sur I et soit $[a;b]$ une partie de I. L'*intégrale (définie) de f sur l'intervalle* $[a;b]$, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est le nombre réel qui est égale à $F(b) - F(a)$. Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

La différence $F(b) - F(a)$ s'appelle la *variation de F entre a et b* ; elle est aussi notée $\big[F(x)\big]_a^b$.

Signification géométrique : Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la surface limitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.
Si f prend des valeurs négatives, l'aire est affectée du signe moins sur les intervalles où $f < 0$.

Propriétés de base : Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$:

(1) Pour toute constante c on a : $\int_a^b \big(cf(x)\big)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
(2) $\int_a^b \big[(f(x) + g(x)\big]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
(3) (Intégration par parties) $\int_a^b [f(x)g'(x)]\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b [f'(x)g(x)]\,dx\,.$
(4) (Changement de variable) $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy\,.$
(5) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$
(6) Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$. En particulier : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
(7) Si $c \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$
(8) Pour $a < b$ on pose : $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Les propriétés (1) à (4) ont des analogues pour l'intégrale indéfinie.

Intégrales indéfinies usuelles (C dénote une constante réelle arbitraire)

Polynômes : $\int 1\,dx = x + C$; $\int x\,dx = \frac{1}{2}x + C$; $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.
En général pour $n = 1, 2, \ldots$ on a : $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\,.$

Fonctions trigonométriques : $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C\,,$ $\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

Fonctions trigonométriques inverses : $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$; $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

Exponentiels, logarithmes, puissances :
$\int e^x\,dx = e^x + C$; $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$; pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$ et $x > 0$ on a : $\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$.
Cas particuliers :
Pour $a > 0, a \neq 1$ on a : $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
Pour $n = 1, 2, \ldots$ on a : $\int \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \sqrt[n]{x} + C$

Fonctions trigonométriques hyperboliques :
$\int (\sinh x)\,dx = \cosh x$; $\int (\cosh x)\,dx = \sinh x$; $\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \int (1 - \tanh^2 x)\,dx = \tanh x + C\,.$

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

(1) Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, alors $g'(x) = f(x)$.

(2) Si $F'(x) = f(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Intégrales de fonctions symétriques :
Soit f continue sur l'intervalle symétrique $[-a, a]$.
Si f est paire (c-à-d $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
Si f est impaire (c-à-d $f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a : $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

Théoreme de la valeur moyenne : Si f est continue sur l'invervalle $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$. La *valeur moyenne* de la fonction continue f sur l'intervalle $[a, b]$ est le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Techniques d'intégration particulières :
Substitution trigonométrique :

Expression	substitution	identité
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta\,,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta\,,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2$	$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{\cos\theta}\,,\ 0 \le \theta < \pi/2$ ou $\pi \le \theta < \frac{3}{2}\pi$	$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

Intégration de fractions rationnelles :
Une fonction rationnelle est une fonction de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes à coefficients réels :
Cas 1 : $\deg P(x) \ge Q(x)$. On applique l'algorithme de division pour obtenir une fonction du type $A(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ avec $A(x), R(x)$ polynômes et $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Ensuite on applique le cas 2.
Cas 2 : $\deg P(x) < \deg Q(x)$. On décompose le polynôme $Q(x)$ en polynômes irréductibles :

$$Q(x) = a\,(x-r_1)^{m_1}\cdots(x-r_p)^{m_p}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}$$

où $a, r_1, \dots r_p, b_1, c_1, \dots, b_q, c_q \in \mathbb{R}$ et $m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q$ sont des entiers positifs. Chacun des polynômes $x^2 + b_jx + c_j$ dans cette décomposition est sans racine réelle, c-à-d $\Delta := b_j^2 - 4c_j < 0$.
On écrit $P(x)/Q(x)$ dans la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(x-r_i)^k} + \sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{n_j}\frac{B_{jl}\,x + C_{jl}}{(x^2+b_jx+c_j)^l}.$$

Le problème est donc réduit à calculer des intégrales du type : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-r)^k}$ et $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{(x^2+b\,x+c)^k}dx$.

On a : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-r)^k} = \begin{cases} \dfrac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + \text{constant} & \text{si } k \neq 1 \\ \ln|x-r| + \text{constant} & \text{si } k = 1 \end{cases}$. En outre, on cherche $C, D \in \mathbb{R}$ tels que : $\dfrac{A\,x+B}{(x^2+b\,x+c)^k} = C\,\dfrac{2\,x+b}{(x^2+b\,x+c)^k} + \dfrac{D}{(x^2+b\,x+c)^k}$. On calcule $\displaystyle\int \frac{2\,x+b}{(x^2+b\,x+c)^k}\,dx$ par substitution (c'est une intégrale de la forme $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{(f(x))^k}\,dx$). Pour $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+b\,x+c)^k}\,dx$, on écrit d'abord par substitution l'intégrale dans la forme $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$, puis on résout cette dernière intégrale par substitution trigonométrique $t = \tan\theta$.