Feuille de TD n^0 6 : Suites de fonctions

Exercice 1 Déterminer la limite simple sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur I lorsque

(a) $I = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^n} \qquad (x \in I)$.

(b) $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2} \qquad (x \in I)$.

Exercice 2 On considère la suite de functions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $I = [0, 1]$, où

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

(a) Montrer que la suite converge simplement sur I vers une fonction f à déterminer.

(b) Soit $n \geq 1$ fixé. Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{2}{n}$.

(c) Déduire de (b) que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{2}{n}$.

(d) Conclure que (f_n) converges uniformement vers f pour $n \to +\infty$.

Exercice 3 . Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{x + in}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Est-ce que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$? Déterminer, si possible, la limite de la suite (f_n) ainsi que les limites des suites parties réelles et parties imaginaires.