Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2015-2016

Séries et transformations (L2, EE-APR)

Feuille de TD n^0 7 : Séries de fonctions

Exercice 1 On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$.

(a) Montrer que cette série converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f à déterminer.

(b) Montrer que cette série converge normalement sur $[0,1/2]$ (et plus généralement sur $[0,a]$ où $0<a<1$ est fixé).

Exercice 2 Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ dans les cas suivants.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $I=[0,+\infty[$ et sur $I=[0,1/2]$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^2}$ sur $I=[0,1]$.

Exercice 3 Montrer que la série de functions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement mais pas absolument sur $[0,1]$.

Exercice 4 On considère la série de functions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}\,.$$

(a) Montrer que cette série converge nomalement sur $\mathbb{R}$.

(b) On note S la somme de $\sum_{n\geq 1} f_n$. Montrer que S est dérivable s et $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 5 . On considère la function $f(x)=e^x$ et $x_0=0$.

(a) Déterminer la série de Taylor de f en x_0.

(b) Montrer que $f(x)$ est développable en série de Taylor dans un intervalle I qui contient x_0. En déduire la valeur de la somme de la série de Taylor dans un intervalle qui contient x_0.

Repondre aux questions (a) et (b) ci-dessus pour $f(x)=\ln(x)$ et $x_0=2$.