Université de Lorraine – Metz
Séries et transformations (L2, EE-APR)

Année universitaire 2015-2016

Feuille de TD n^0 8 : Séries de Fourier

Exercice 1 On considère les fonctions 2π-périodiques f, g et h sur $\mathbb{R}$ définies sur $[-\pi, \pi[$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases} \\ g(x) &= x\,, \\ h(x) &= |\sin x|\,. \end{aligned}$$

(a) Tracer les graphes de f, g et h.

(b) Montrer que f, g et h sont C^1 par morceaux.

(c) Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de f, g et h. Ecrire les séries de Fourier correspondantes.

(d) Calculer la somme des séries de Fourier de f, g et h.

(e) Déduire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} &= \frac{\pi}{4}\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2}\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} &= \frac{\pi-2}{4}\,. \end{aligned}$$

(f) On considère la série de Fourier de h pour $x \in [0, \pi]$. Par dérivation et intégration, déterminer un développement en fonctions trigonométriques de la fonction $\cos x$. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 2 Au moyen du théorème de Plancherel, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$