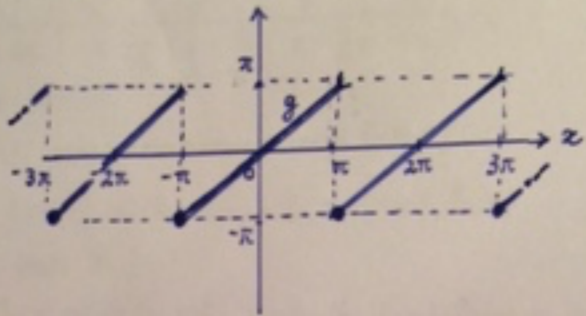
Feuille de TD n°8: Séries de Fourier

CORRIGES DE L'EX 1, parties (a) jusqu'à (e) pour g et h

(1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique et définie sur $[-\pi,\pi[$ par $g(x)=x$

(a) Graphe de g



b) g est C^1 par morceaux

On montre que g est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$

- g est continue sur $]-\pi,\pi[$ et les limites: $g(-\pi+)=-\pi$, $g(\pi-)=\pi$ existent finies
- g est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ avec dérivée $g'(x)=1$ continue sur $]-\pi,\pi[$ et les limites $g'(-\pi+)=1$ et $g'(\pi-)=1$ existent finies

c) g est impaire, d'où $a_n=0$ pour $n\geq 0$; si $n>0$: $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx=$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\underbrace{\sin(nx)}_{\left(\frac{-1}{n}\cos(nx)\right)'}dx=\frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}+\frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Si $n>0$, alors $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=-\frac{i}{2}b_n=-\frac{i}{n}(-1)^{n+1}$ et $c_{-n}=-c_n=\frac{i}{n}(-1)^{n+1}$

Si $n=0$, alors $c_0=0$

La série de Fourier de g en forme réelle est:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

La série de Fourier de g en forme complexe est:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(-1)^{n+1}\left[-e^{inx}+e^{-inx}\right]$$

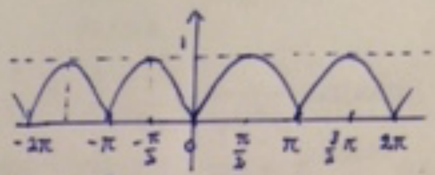
[remarque: $2\sin(nx)=-i(e^{inx}-e^{-$

(d) D'après le théorème de Dirichlet on a

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\begin{cases} g(x) & \text{si } x\neq k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\ \frac{g(k\pi-)+g(k\pi+)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0 & \text{si } x=k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

(2) $h(x)=|\sin x|$ sur $[-\pi,\pi[$ et 2π-périodique

(a) Graphe de h



(b) h est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

On montre que h est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi]$

- h est continue sur $]-\pi,\pi[$ et $h(-\pi+)=h(\pi-)=0=h(\pi)$
  (ainsi h est continue sur $\mathbb{R}$)
- h est dérivable sur $]-\pi,0[\,\cup\,]0,\pi[$. Puisque $h(x)=\begin{cases}\sin x & \text{sur }]0,\pi[\\ -\sin x & \text{sur }]-\pi,0[\end{cases}$
  on conclut que $h'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{sur }]0,\pi[\\ -\cos x & \text{sur }]-\pi,0[\end{cases}$

  En particulier, $h'(x)$ est continue sur $]0,\pi[$ et $]-\pi,0[$

  En outre
$$\left.\begin{aligned} h'(-\pi+) &= \lim_{\substack{x\to-\pi\\ x>-\pi}}(-\cos x) = -\cos(-\pi)=1\\ h'(\pi-) &= \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\cos x = -1\\ h'(0-) &= -1\\ h'(0+) &= 1\end{aligned}\right\}\text{ existent finies}$$

(c) h est paire, d'où $b_m=0$ pour $m>0$; on a: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\sin x}_{=(-\cos x)'}\,dx$
$=\frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}[1+1]=\frac{4}{\pi}$ et pour $m>0$

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos(mx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx$

On calcule l'intégrale $\int_0^{\pi}\sin x\underbrace{\cos(mx)}_{(\frac{1}{m}\sin(mx))'}\,dx$ par parties

$$\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx=\underbrace{\Big[\sin x\,\tfrac{1}{m}\sin(mx)\Big]_0^{\pi}}_{=0}-\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\cos x\underbrace{\sin(mx)}_{(-\frac{1}{m}\cos(mx))'}\,dx$$
$$=\frac{1}{m^2}\big[\cos x\cos(mx)\big]_0^{\pi}-\frac{1}{m^2}\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx$$
$$=\frac{1}{m^2}\Big[\underbrace{\cos\pi}_{=-1}\underbrace{\cos(m\pi)}_{=(-1)^m}-\underbrace{\cos(0)\cos(0)}_{1}\Big]-\frac{1}{m^2}\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx$$

$$\Big(1-\frac{1}{m^2}\Big)\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx=\frac{-1}{m^2}\big[(-1)^m+1\big]$$

$(m^2-1)\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx=-\big[(-1)^m+1\big]$. d'où $\int_0^{\pi}\sin x\cos(mx)\,dx=-\frac{(-1)^m+1}{m^2-1}$

et $a_m=-\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^m+1}{m^2-1}=\frac{2\big[(-1)^{m+1}-1\big]}{\pi(m^2-1)}=\begin{cases}0 & \text{si } m \text{ est impair}\\ -\frac{4}{\pi(m^2-1)} & \text{si } m \text{ est pair}\end{cases}$

(d) La série de Fourier de h en forme réelle est donc:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) = \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ pair}}}^{\infty} \frac{(-4)}{\pi(m^2-1)} \cos(mx) \qquad \begin{matrix} m \text{ pair} \Rightarrow m = 2k \\ m \geq 1 \qquad k \geq 1 \\ \Rightarrow m^2 = 4k^2 \end{matrix}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx)$$

En forme complexe [on écrit $\cos(2kx) = \dfrac{e^{i2kx} + e^{-i2kx}}{2}$]

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx)$$

(d) Puisque h est continue et C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier de h converge simplement vers h :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx) = h(x) \qquad (*)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

(e) La deuxième et la 3ème série de cette question sont obtenues en évaluant la série $(*)$ pour des valeurs de x convenables.

Si $x = 0$, $(*)$ donne :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \overbrace{\cos(0)}^{=1} = \overbrace{h(0)}^{=0}$$

càd $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, $(*)$ donne :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

d'où $\displaystyle 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$

càd $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

REMARQUES

(f) ne fait pas partie du programme du contrôle

L'exercice 2 est une application du théorème de Plancherel, qui ne fait partie du programme du contrôle.