CHAPITRE 5

Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions

DÉFINITION 1. Soit I un intervalle (borné ou pas borné) de $\mathbb{R}$. Une *suite de fonctions sur I* est une liste ordonnée

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

où, pour tout n, $f_n : I \to \mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$) est une fonction définie sur I à valeurs réelles (ou complexes). On note cette suite par $(f_n)_{n\geq 0}$ (ou simplement par (f_n) quand il n'y a pas d'ambiguité).

Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions sur I, alors pour tout $a \in I$ on obtient la suite numerique

$$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a), \dots$$

obtenue en évaluant chaque fonction de la suite en a.

EXEMPLE 1. (a) On considère la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ comme suite de fonctions sur $I = \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, en évaluant cette suite en $x = a$ on obtient la suite numérique $(a^n)_{n\geq 0}$, qui est la suite géométrique de raison a.

(b) La suite $\left(e^{ixn}\right)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs complexes. Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, en évaluant cette suite en $x = a$, on obtient la suite numérique à valeurs complexes $\left(e^{ian}\right)_{n\geq 0}$ (qui est également une suite géométrique, de raison e^{ia}). Par exemple : si $x = 0$, alors $e^{i0n} = 1$ pour tout n, d'où en évaluant la suite $\left(e^{ixn}\right)_{n\geq 0}$ en $x = 0$ on obtient la suite constante $1, 1, \dots$; si $x = \pi$, alors $e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout n, d'où en évaluant la suite $\left(e^{ixn}\right)_{n\geq 0}$ en $x = \pi$ on obtient la suite alternée $1, -1, 1, -1 \dots$.

REMARQUE 1. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ définies sur I à valeurs complexes, on obtient deux suites $(\operatorname{Re} f_n)_{n\geq 0}$ et $(\operatorname{Im} f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur I à valeurs réelles, où pour tout indice n les fonctions $\operatorname{Re} f_n : I \to \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f_n : I \to \mathbb{R}$ sont définies en $x \in I$ en prénant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $f_n(x)$, c'est-à-dire :

$$(\operatorname{Re} f_n)(x) = \operatorname{Re}\big(f_n(x)\big) \qquad \text{et} \qquad (\operatorname{Im} f_n)(x) = \operatorname{Im}\big(f_n(x)\big)\,.$$

EXEMPLE 2. Si $f_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ alors $(\operatorname{Re} f_n)(x) = \cos(nx)$ et $(\operatorname{Im} f_n)(x) = \sin(nx)$.

REMARQUE 2. Comme pour les suites numériques, on peut considérer des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ où n_0 est un entier fixé.

DÉFINITION 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$.

On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge en* $x_0 \in I$ lorsque la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ est convergente.

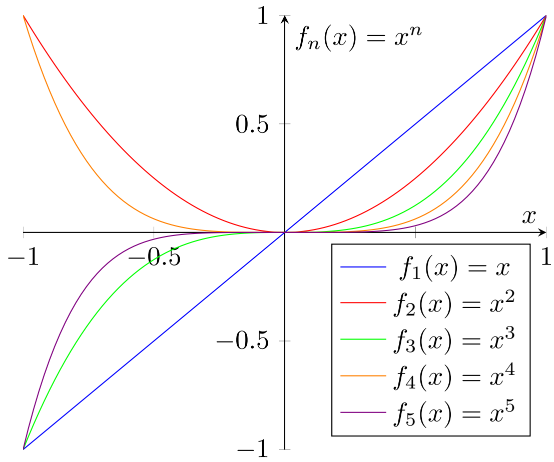
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge simplement sur I vers la fonction f* lorsque f est une function définie sur I et pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 0}$ (obtenue en évaluant chaque fonction f_n en x) converge vers le nombre $f(x)$ pour $n \to +\infty$, c'est-à-dire : pour tout $x \in I$ on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

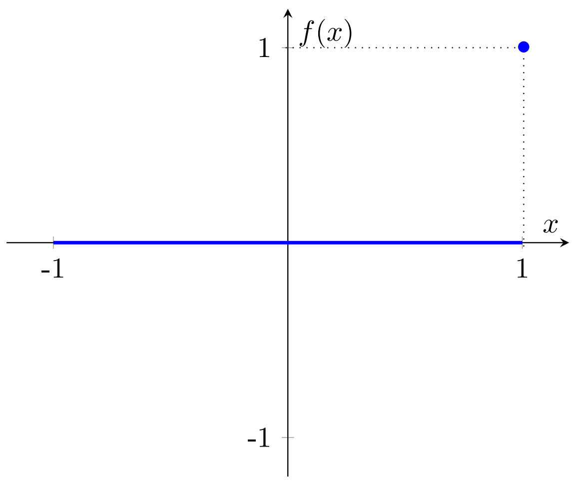
Exemple 3. La suite $(x^n)_{n\geq 0}$ converge en $x \in I =]-1,1]$ et ne converge pas en $x \notin I$. Plus précisement :

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\,, \\ 1 & \text{si } x = 1\,, \\ +\infty & \text{si } x > 1\,, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Par conséquent, $(x^n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\,, \\ 1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$$





Par la suite on aura besoin de la notion de borne supérieure (ou supremum).

Définition 3. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie qui possède un majorant (c'est-à-dire, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in E$). La *borne supérieure (ou supremum) de* E, notée $\sup E$, est le plus petit des majorants de E.

Exemple 4. Si $E = [1,2[$ ou $E = [1,2]$, alors $\sup E = 2$. Si $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, alors $E = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, alors $\sup E = 1$.

On utilisera aussi la notation $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\big(1-\frac{1}{n}\big)$ au lieu de $\sup\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

Définition 4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément sur* I *vers* $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,,$$

où

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Exemple 5. (a) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de functions sur $I = [-\pi,\pi]$ définie par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle f donnée par $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. En effet, pour $n \geq 0$ fixé, on a

$$0 \leq \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left|\frac{\sin(nx)}{n} - 0\right| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Ainsi $0 \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ donne $\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(b) La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ vers la fonction nulle $f(x) = 0$ pour tout x. La convergence n'est toutefois pas uniforme, car

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1\,.$$

Ainsi la suite numérique $\big(\|f_n - f\|_\infty\big)_{n\geq 0}$, qui est la suite constante égale à 1, ne converge pas vers 0.

La notion de convergence forte est plus forte de celle de convergence simple.

Proposition 1. *Si (f_n) converge uniformement sur I vers f, alors (f_n) converge simplement sur I vers f. La propriété réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple précédent).*

Le lien entre la convergence d'une suite de fonction est celle de ses parties réelle et imaginaire est donné par la proposition suivante.

Proposition 2. *La suite (f_n) converge simplement sur I vers f si et seulement si les suites $(\operatorname{Re} f_n)$ et $(\operatorname{Im} f_n)$ convergent simplement sur I respectivement vers $\operatorname{Re} f$ et vers $\operatorname{Im} f$. La propriété analogue est vraie pour la convergence uniforme.*

2. Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de functions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. Dans cette section on étudie les différentes notions de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Définition 5. La *suite des sommes partielles* de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur I, où, pour tout $n \geq 0$ fixé, S_n est la fonction sur I définie par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ pour tout $x \in I$. La fonctions S_n est la *somme partielle n-ème* de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge en* $x_0 \in I$ si la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge, c'est-à-dire si la suite numérique $(S_n(x_0))_{n\geq 0}$ des sommes partielles évaluées en x_0 est convergente. On note $S(x_0)$ la limite : $S(x_0) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x_0)$. On appelle le nombre $S(x_0)$ la *somme de la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *en* x_0, écrit $S(x_0) = \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ ou bien $S(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$.
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* I si elle converge en tout $x \in I$. Ceci équivaut à dire que la suite (S_n) converge simplement sur I. On note $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ pour tout $x \in I$ fixé. On obtient ainsi une fonction $S : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui associe à tout $x \in I$ la somme $S(x)$ de la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$. La fonction S s'appelle la *somme sur I de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$, ce qu'on l'écrit
$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geq 0} f_n\,.$$
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolumment sur* I si la série numérique $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in I$.
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur* I vers la somme $S : I \to: R$ (ou $\mathbb{C}$) lorsque la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers S.
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* I s'il existe une série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ telle que :

- $a_n \geq 0$ pour tout n (c'est-à-dire $\sum_{n\geq 0} a_n$ est une série à termes positifs),
- $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge,
- Pour tout $n \geq 0$ fixé et pour tout $x \in I$ on a : $|f_n(x)| \leq a_n$.

Remarque 3. Comme dans le cas des séries numériques, on pourrait considérer des séries de fonctions de la forme $\sum_{n\geq n_0} f_n$, où n_0 est un entier fixé.

Exemple 6. On considère la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$. On sait que

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1\,, \\ n+1 & \text{si } x = 1\,. \end{cases}$$

Ceci définit la suite (S_n) de ses sommes partielles. Pour tout x fixé on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } |x| < 1\,, \\ \text{n'existe pas} & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge simplement sur $I =]-1,1[$ vers la fonction $S :]-1,1[\to \mathbb{R}$ donnée par $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

La convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$ vers S n'est pas uniforme sur $]-1,1[$. En effet, soit $n \geq 0$ fixé. Alors

$$|S_n(x) - S(x)| = \Big|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\Big| = \frac{|x|^n}{|1-x|}\,,$$

d'où

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1[} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in]-1,1[} \frac{|x|^n}{|1-x|} = \sup_{x\in[0,1[} \frac{x^n}{1-x} = +\infty\,.$$

La suite numérique $(\|S_n - S\|_\infty)_{n\geq 0}$ ne peut être convergente vers 0.

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge absolumment sur $]-1,1[$, car pour tout $x \in]-1,1[$ fixé la série $\sum_{n\geq 0} |x^n|$ converge.

Proposition 3 (Liens entre les notions de convergence). .

(a) *Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est absolumment convergente sur I, alors elle est aussi simplement convergente sur I.*

(b) *Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur I, alors elle est aussi simplement convergente sur I.*

(c) *Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur I, alors elle est aussi uniformément convergente sur I et absolumment convergente sur I, donc simplement convergente sur I.*

Remarque 4. Les convergences normale et absolue nous ensurent la convergence simple d'une série de fonctions $\sum f_n$, mais ne donnent pas de méthode pour déterminer sa somme.

Exemple 7. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $0 < a < 1$. En effet : pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [-a,a]$ on a $|x^n| = |x|^n \leq a^n$ et la série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ est convergente. Par conséquent, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $0 < a < 1$.

Proposition 4 (Parties réelles et imaginaires). *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ et soient $\sum \operatorname{Re} f_n$ et $\sum \operatorname{Im} f_n$ les séries de ses parties réelles et imaginaires. Alors : $\sum f_n$ converge simplement (respectivement, uniformément/absolumment/normalement) sur I si et seulement $\sum \operatorname{Re} f_n$ et $\sum \operatorname{Im} f_n$ le font. Dans ce cas, $\sum f_n = S$ si et seulement si $\sum \operatorname{Re} f_n = \operatorname{Re} S$ et $\sum \operatorname{Im} f_n = \operatorname{Im} S$.*

Proposition 5 (Propriétés des séries uniformement convergentes). *Soit* $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *une série de fonctions* f_n *sur* I *à valeurs réelles ou complexes.*

(a) *Supposons que pour tout* n *la fonction* f_n *est continue sur* I. *Si* $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge uniformément sur* I *vers* S, *alors* S *st continue sur* I.

(b) *Supposons que :*

- f_n *est continue sur* I *pour tout* n,
- $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge simplement sur* I *vers* S,
- S *est continue sur* I,
- $\sum_{n\geq n_0} \int_I |f_n(x)|\, dx$ *converge.*

Alors $\int_I \big(\sum_{n\geq n_0} f_n(x)\big)\, dx = \sum_{n\geq n_0} \int_I f_n(x)\, dx$.

(c) *Supposons que :*

- f_n *est dérivable sur* I *et sa dérivée* f_n' *est continue sur* I *pour tout* n,
- $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge simplement sur* I *vers* S,
- $\sum_{n\geq n_0} f_n'$ *converge uniformément sur* I.

Alors S *est dérivable sur* I *et*

$$S'(x) = \Big(\sum_{n\geq n_0} f_n(x)\Big)' = \sum_{n\geq n_0} f_n'(x)\,.$$

Exemple 8. On veut calculer la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ pour $x \in I = \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$. On remarque que $nx^{n-1} = f_n'(x)$ pour $f_n(x) = x^n$. Plus précisement (since $(x^0)' = 1' = 0$), on a :

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 1} (x^n)' = \sum_{n\geq 0} (x^n)'\,.$$

En outre, $f_n'(x) = nx^{n-1}$ est continue sur I et la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = x^n$ converge simplement sur I vers $\frac{1}{1-x}$. En plus, $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge uniformément sur I. En effet, cette série converge normalement, car pour tout $n \geq 1$ on a : $|nx^{n-1}| = n|x|^{n-1} \leq n\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}$ et la série numérique $\sum_{n\geq 1} n\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}$ est convergente (ceci peut être vérifié au moyen de la règle d'Alembert).

La partie (b) de la proposition 5 avec $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 0$ et $I = \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$ montre alors que

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (x^n)' = \Big(\sum_{n\geq 0} x^n\Big)' = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

3. Séries de Taylor

Les séries de Taylor forment une classe importante de séries de fonctions.

Définition 6. Soit $I =]a, b[$ un intervalle (borné ou pas) de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est *indéfiniment dérivable* sur I lorsque f possède dérivée n-ème $f^{(n)}$ sur I pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$. On écrit alors $f \in C^\infty(I)$.

On rappelle que $f^{(0)} = f$ et que pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est la dérivée de $f^{(n-1)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x)\,, \\
f^{(1)}(x) &= (f^{(0)})'(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}(x)\,, \\
f^{(2)}(x) &= (f^{(1)})'(x) = (f')'(x) = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\,, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)})'(x) = \Big(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\Big)'(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)\,.
\end{aligned}$$

Définition 7. Soit f une fonction indéfinitement dérivable sur $I =]a, b[$. La *série de Taylor de f en $x = x_0 \in I$* est la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots .$$

On dit qu'une fonction f est *développable en série de Taylor en $x = x_0$* s'il existe un intervalle $I =]a, b[\subset I$ contenant x_0 tel que :

- $f \in C^{\infty}(I)$,
- la série de Taylor de f en x_0 converge simplement vers f sur I, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Exemple 9. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est indéfinitement dérivable sur $I = \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = \cos(x)\,, && f^{(1)}(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)\,, \\
&f^{(2)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x)\,, && f^{(3)}(x) = (-\cos(x))' = \sin(x)
\end{aligned}$$

et, en général, pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&f^{(4k)}(x) = \cos(x)\,, && f^{(4k+1)}(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)\,, \\
&f^{(4k+2)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x)\,, && f^{(4k+3)}(x) = (-\cos(x))' = \sin(x)\,.
\end{aligned}$$

Si par exemple $x_0 = 0$, alors

$$f^{(4k)}(0) = 1\,, \quad f^{(4k+1)}(0) = 0\,, \quad f^{(4k+2)}(0) = -1\,, \quad f^{(4k+3)}(0) = 0.$$

Puisque $4k = 2(2k)$ et $4k + 2 = 2(2k + 1)$ sont pairs tandis que $4k + 1$ et $4k + 3$ sont impairs, on a donc pour tout $n \geq 0$:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \qquad \text{et} \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0\,.$$

La série de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ en $x = 0$ est donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \qquad \big[\text{car } f^{(2n+1)}(0) = 0\big] \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

La proposition suivante donne un critère simple pour vérifier si une fonction est développable en série de Taylor en x_0.

PROPOSITION 6. *Supposons que la fonction f soit indéfiniment dérivable dans l'intervalle I contenant x_0. S'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in I$ on a : $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, alors f est développable en série de Taylor en x_0.*

EXEMPLE 10. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées $f^{(n)}(x)$ sont de la forme $\pm\cos(x)$ ou bien $\pm\sin(x)$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$. Par conséquent, la fonction $f(x) = \cos(x)$ est développable en série de Taylor en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En particulier, elle est développable en série de Taylor en $x_0 = 0$ et l'exemple ci-dessus donne donc : $\cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.