CHAPITRE 6

Séries de Fourier

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique de période T lorsque $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dira aussi que f est T-périodique. La *fréquence* d'une fonction T-périodique est $\frac{1}{T}$.

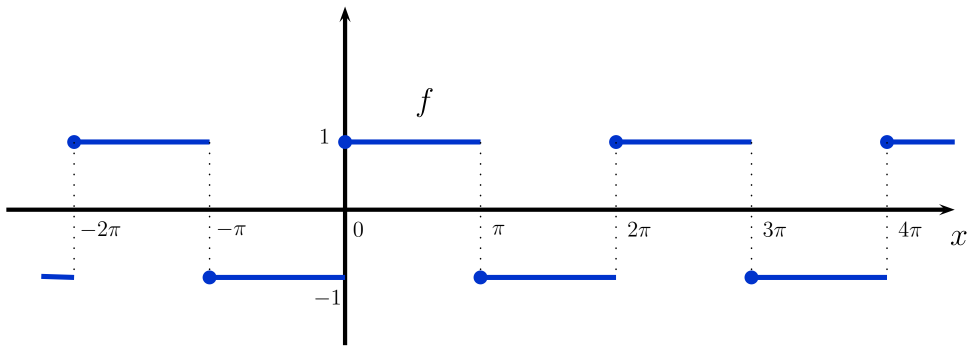
Le but de l'analyse de Fourier est celui d'écrire une fonction periodique (suffisamment régulière) de période T, c'est-à-dire de fréquence $\frac{1}{T}$, comme somme d'une série de fonctions trigonométriques sinus et cosinus de fréquences qui sont multiples de $\frac{2\pi}{T}$, c'est-à-dire fonctions du type $\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$ où 'n est un nombre entier.

L'étude d'une fonction T-périodique par les séries de Fourier a deux étapes :

- l'*analyse*, qui associe à toute fonction T-périodique la suite de ses coefficients de Fourier ;
- la *synthèse*, qui vise à reconstruir une fonction T-périodique à partir de la suite de ses coefficients de Fourier.

On commence par des remarques sur les fonctions périodiques.

Remarque 1. (a) Une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est completement détérminée par ses valeurs sur un intervalle de la forme $[a, a+T[$ ou $]a, a+T]$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.



Par exemple, pour $T = 2\pi$, on peut définir la fonction $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \le x < 2\pi \end{cases} \tag{4}$$

et l'étendre par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de façon à avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On obtient par exemple, $f(2\pi) = f(0+2\pi) = f(0) = 1$ ou $f(3\pi) = f(\pi+2\pi) = -1$. En général, si $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier m (dépendant de x) tel que $x \in [2m\pi, 2(m+1)\pi[$. Puisque $x - 2m\pi \in [0, 2\pi[$, la valeur de $f(x - 2m\pi)$ est donnée par (4). Donc on obtient pour $x = (x - 2m\pi) + 2m\pi$ que $f(x) = f(x - 2m\pi)$. Par example, si $x = 4,5\pi$ alors pour $m = 2$ on a $x - 2m\pi = 4,5\pi - 4\pi = 0,5\pi \in [0, 2\pi[$, d'où $f(4,5\pi) = f(0,5) = 1$.

(b) L'étude d'une fonction T-périodique f peut toujours se ramener à l'étude d'une fonction 2π-périodique g au moyen du changement de variable

$$g(x) = f\left(\tfrac{T}{2\pi}x\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La fonction g est bien 2π-périodique, car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$.

En vue de la remarque 1(b), par la suite on se limitera au cas des fonctions 2π-périodiques.

1. Fonctions continues par morceaux et C^1 par morceaux

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles et soit $x_0 \in]a, b[$. On note $f(x_0-)$ la limite de f pour x qui tend vers x_0 avec $x < x_0$, si cette limite existe, et $f(x_0+)$ la limite de f pour x qui tend vers x_0 avec $x > x_0$, si cette limite existe. Pour $x_0 = a$, on peut considérer $f(a+)$ (si la limite existe) et pour $x_0 = b$, on peut considérer $f(b-)$ (si la limite existe).

Exemple 1. On considère la restriction de la fonction f de (4) à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Ainsi $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$. Alors $f(0+) = 1$, $f(\pi-) = 1$, $f(\pi+) = -1$, $f(2\pi-) = -1$. On observe que les deux limites $f(\pi-)$ et $f(\pi+)$ existent finies, mais elles sont distinctes et $f(\pi-) = 1 \neq f(\pi)$. En outre, $f(2\pi-) = -1$ existe finie, mais différente de la valeur $f(2\pi)$ de f en 2π.

Définition 1. On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ (où $-\infty < a < b < +\infty$) est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ avec $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ tels que :

- les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a, x_1[$, $]x_1, x_2[, \ldots,]x_{n-1}, x_n[,]x_n, b[$ est continue,
- toutes les limites $f(a+)$, $f(x_1-)$, $f(x_1+)$, $f(x_2-)$, $\ldots$, $f(x_n+)$, $f(b-)$ existent et sont finies, c'est-à-dire f admet une limite finie à droite et à gauche en chaque extremité des intervalles de continuité (les limites à droite et à gauche en chaque x_j peuvent être distinctes et peuvent aussi être distinctes de la valeur $f(x_j)$ de f au point x_j lui-même).

Définition 2. On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ (où $-\infty < a < b < +\infty$) est C^1 *par morceaux* sur $[a, b]$ si

- f est continue par morceaux sur $[a, b]$

et s'il existe un nombre fini de points $u_1, \ldots, u_m$ avec $a < u_1 < \cdots < u_m < b$ (qui includent les points $x_1, \ldots, x_n$ où f n'est pas continue) tels que :

- les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a, u_1[$, $]u_1, u_2[, \ldots,]u_{m-1}, u_m[,]u_m, b[$ est dérivable avec dérivée f' continue,
- toutes les limites $f'(a+)$, $f'(u_1-)$, $f'(u_1+)$, $f'(u_2-)$, $\ldots$, $f'(u_n+)$, $f'(b-)$ existent et sont finies, c'est-à-dire f' admet une limite finie à droite et à gauche en chaque extremité des intervalles de définition de f' (les limites à droite et à gauche en chaque u_j peuvent être distinctes et peuvent aussi être distinctes de la valeur $f'(u_j)$ de f' au point u_j lui-même).

Définition 3. On dit que f définie sur $\mathbb{R}$ est *continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ (respectivement, C^1 *par morceaux sur* $\mathbb{R}$) si elle est continue (respectivement, C^1) par morceaux sur chaque intervalle borné $[a, b]$.

Lemme 1. *Une fonction 2π-périodique est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$) si elle est continue par morceaux (respectivement C^1 par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$ qui contient une période (c'est-à-dire de longueur $b - a \geq 2\pi$).*

Exemple 2. La fonction 2π-périodique f de la remarque 1 est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est C^1 par morceaux sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, comme on va le montrer maintenant.

- f est continue sur les intervalles $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$. Aux extremités les limites à droite et/ou à gauche $f(0+) = 1$, $f(\pi-) = 1$, $f(\pi+) = -1$ et $f(2\pi-) = -1$ existent finies. Donc f est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$.
- f est dérivable sur $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$, avec dérivée $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et tout $x \in]\pi, 2\pi[$. En particulier, la dérivée f' est continue sur ces deux intervalles. En outre, toutes les limites $f'(0+)$, $f'(\pi-)$, $f'(\pi+)$ et $f'(2\pi-)$ existent finies : elles sont toutes égales à 0.

Remarque 2. Une fonction f qui est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur chaque intervalle $[a, b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$. En outre, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,.$$

Par exemple, $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,.$

Remarque 3. On rappelle l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la surface limitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. Voir figure 1.

Si f prend des valeurs négatives, l'aire est affectée du signe moins sur les intervalles où $f < 0$. Voir figure 2.

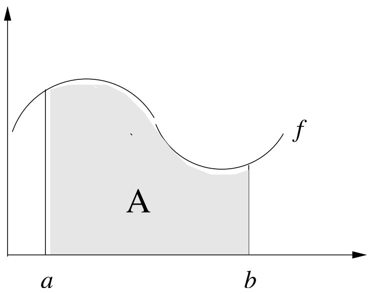


Figure 1 :
$\int_a^b f(x)\,dx$ = aire de A

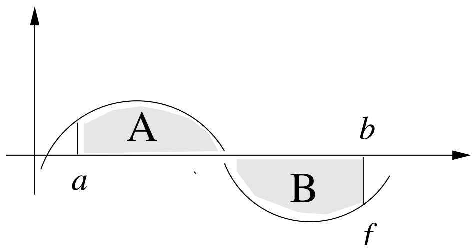


Figure 2 :
$\int_a^b f(x)\,dx$ = (aire de A) - (aire de B)

Par conséquent :

- si une fonction f est paire et intégrable sur $[-\pi, \pi]$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,.$$

- si une fonction f est impaire et intégrable sur $[-\pi, \pi]$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0\,.$$

Par exemple, $\cos(x)$ est une fonction paire et continue (donc intégrable) et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx\,.$ En outre, $\sin(x)$ est une fonction impaire et continue (donc intégrable) et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = 0$.

Une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ à valeurs complexes est dérivable lorsque ses parties réelles $\operatorname{Re} f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et imaginaires $\operatorname{Im} f :]a,b[\to \mathbb{R}$ sont dérivables. Dans ce cas, pour tout $x \in]a,b[$ on a

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)\,.$$

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes est intégrable lorsque ses parties réelles $\operatorname{Re} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et imaginaires $\operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont intégrables. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big(\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx\Big) + i\Big(\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx\Big)\,.$$

Exemple 3. Pour n un nombre entier fixé, la fonction

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

est à valeurs complexes, 2π-périodique, de partie réelle $\cos(nx)$ (qui est 2π-périodique et paire) et de partie imaginaire $\sin(nx)$ (qui est 2π-périodique et impaire).

On a : $(\cos(nx))' = -n\sin(nx)$ et $(\sin(nx))' = n\cos(nx)$. Donc

$$(e^{inx})' = (\cos(nx))' + i(\sin(nx))' = -n\sin(nx) + in\cos(nx) = in\big(\cos(nx) + i\sin(nx)\big) = ine^{inx}\,.$$

Si $n = 0$, alors $e^{i0x} = 1$, d'où $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$.

Si $n \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx &= 2\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = 2\big[\tfrac{1}{n}\sin(nx)\big]_{x=0}^{x=\pi} = 0\,,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx &= 0\,,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx\Big) + i\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx\Big) = 0\,.$$

2. Séries de Fourier

Par la suite on notera par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers $\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$. Comme auparavant, le symbole n indiquera toujours un entier. On écrira donc $n \geq 0$ pour indiquer que n est un nombre entier non-négatif.

Définition 4. Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Les *coefficients de Fourier réels de* f sont les nombres a_n et b_n, avec $n \geq 0$, définis comme suit :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,,\\
b_0 &= 0\,,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (\text{pour } n > 0)\,,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (\text{pour } n > 0)\,.
\end{aligned}$$

Les *coefficients de Fourier complexes de* f sont les nombres c_n, avec $n \in \mathbb{Z}$, définis par

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,.$$

Les formules définissant les coefficients de Fourier peuvent s'écrire en forme plus simple lorsque la fonction f est paire ou impaire.

LEMME 2. *Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*

(a) *Si f est paire, alors*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx\,, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx \qquad \textit{(pour } n>0\textit{)}, \\ b_n &= 0 \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)}. \end{aligned}$$

(b) *Si f est impaire, alors*

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)}, \\ b_0 &= 0\,, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx \qquad \textit{(pour } n>0\textit{)}. \end{aligned}$$

(c) *Les coefficients de Fourier réels et complexes sont liés par les relations suivantes :*

$$a_n = c_n + c_{-n} \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)} \tag{5}$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)} \tag{6}$$
$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)} \tag{7}$$
$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad \textit{(pour } n\geq 0\textit{)}. \tag{8}$$

Les formules ci-dessus donnent, en particulier, pour $n=0$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \textit{et} \qquad a_0 = 2c_0\,.$$

DÉMONSTRATION. Pour les parties (a) et (b), on utilise la remarque 3. En effet, puisque le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impaire, tandis que le produit de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires est paire, on a :

- si f est paire, alors la fonction $f(x)\cos(nx)$ est paire pour tout $n\geq 0$,
- si f est paire, alors la fonction $f(x)\sin(nx)$ est impaire pour tout $n\geq 0$,
- si f est impaire, alors la fonction $f(x)\cos(nx)$ est impaire pour tout $n\geq 0$,
- si f est impaire, alors la fonction $f(x)\sin(nx)$ est paire pour tout $n\geq 0$.

Les relations entre les coefficients de Fourier réels et complexes utilisent les relations

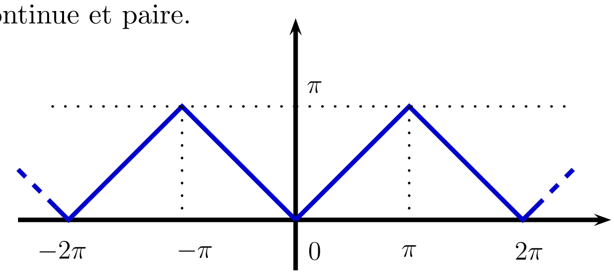
$$\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\,,$$
$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)\,, \qquad e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)\,.$$

Par exemple, on a :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(e^{inx}-e^{-inx}\big)\,dx \\
&= -i\frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\Big) \\
&= i\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx\Big) \\
&= i(c_n - c_{-n})\,.
\end{aligned}$$

□

Exemple 4. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(x)=|x|$. On remarque que la fonction f est continue et paire.



On calcule ses coefficients de Fourier réels. Puisque f est une fonction paire, on a $b_n=0$ pour tout $n\geq 0$. Pour les coefficients a_n avec $n>0$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\;dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\;dx \qquad [\text{car } f \text{ est paire et } \geq 0 \text{ sur } [0,\pi]] \\
&= \frac{2}{\pi}\Big\{\Big[\frac{x\sin(nx)}{n}\Big]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\;dx\Big\} \qquad [\text{intégration par parties}] \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\;dx \qquad [\text{car } \sin(0)=\sin(n\pi)=0] \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n}\,\Big[\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\,\big(\cos(n\pi)-1\big) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\,\big((-1)^n-1\big) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n>0 \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour $n=0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}[x^2]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\pi^2 = \pi\,.$$

Pour calculer les coefficients de Fourier complexes de f, on peut utiliser les relations données dans le lemme 2 :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{a_n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \text{ est pair} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n > 0 \text{ est impair} \end{cases} \\
c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}\,, \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_n}{2} = c_n \qquad (\text{pour } n > 0)\,.
\end{aligned}$$

Définition 5. Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La *série de Fourier de f* est la série de fonctions donnée par l'une des formes suivantes :

- *en forme réelle* : $\displaystyle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\,.$
- *en forme complexe* : $\displaystyle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,.$

Exemple 5. La série de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$ est :

- *en forme réelle* :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 1, n \text{ impair}} \frac{4}{\pi n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)\,.$$

- *en forme complexe* :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}, n \text{ impair}} c_n e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 1, n \text{ impair}} \frac{2}{\pi n^2} \big(e^{inx} + e^{-inx}\big)\,.$$

Dans la définition de série de Fourier en forme complexe donnée ci-dessus, l'écriture $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ (ou $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$) est formelle. La notion de convergence d'une telle série est précisée comme suit. .

Définition 6. Pour $N \geq 0$ *la somme partielle N-ième* de la série de fonction $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ est la fonction 2π-périodique S_N donnée par

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\,.$$

On dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ *converge simplement* (respectivement, *uniformément*) vers la fonction 2π-périodique S sur $\mathbb{R}$ lorsque la suite (S_N) converge simplement (respectivement, uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction S.

Si les coefficients c_n dans la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ sont les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique et continue par morceaux f sur $\mathbb{R}$, alors on écrit :

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\,, \\
S f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{n\to\infty} S_N f(x).
\end{aligned}$$

On a associé à toute fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ sa série de Fourier (en forme réelle ou complexe). Il se pose maintenant la question si cette série converge et, si la réponse est positive, si elle converge vers f (ce qui permettrait de "reconstruire" la fonction f à partir de ses coefficients de Fourier). On demande donc si la série de Fourier de f converge vers sa somme Sf et, lorsque la réponse est oui, si $Sf = f$. Dans ce cas on aurait donc :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)\,.$$

Des hypothèses sur f seront nécessaires afin d'avoir des réponses positives.

La convergence simple de la série de Fourier est donnée par le théorème suivant.

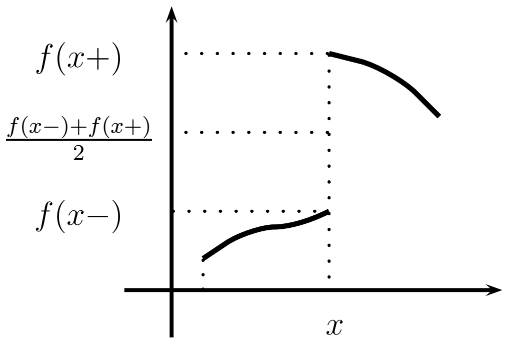
THÉORÈME 1 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π-périodique est C^1 par morceaux. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} S_N f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} S_N f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en x. Donc la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f lorsque f est une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE 4. f est continue en x si et seulement si $f(x) = f(x-) = f(x+)$. Lorsque f est continue par morceaux (en particulier, si f est C^1 par morceaux), si f n'est pas continue en x, alors f a un saut en x. Dans ce cas, $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ est le point d'ordonnée au mileu entre $f(x-)$ et $f(x+)$.



EXEMPLE 6. On considère à nouveau la fonction f de l'exemple 5. Puisque f est continue, on conclut que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) = |x|\,.$$

Par exemple, pour $x = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n\geq 0} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Le théorème de Dirichlet nous dit que si f est 2π-périodique, C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f. On a en effet même la convergence absolue et uniforme.

Théorème 2. *Soit f une fonction 2π-périodique, C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ est uniquement identifiée à partir de ses coefficients de Fourier. Ceci est précisé par le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Soient f et g deux fonctions 2π-périodiques et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Si tous les coefficients de Fourier de f et g sont égaux, alors $f = g$.*

L'ensemble des coefficients complexes d'une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ permet de définir la transformée de Fourier de f.

Définition 7 (Transformée de Fourier). Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de f est la fonction $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(n) = c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \, .$$

Si f est 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer les coefficients de Fourier de f' et écrire sa série de Fourier. Le lien entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f' est établi dans le lemme suivant.

Lemme 3. *Soit f une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et soit f' sa dérivée. On note :*

$$\begin{array}{ll} a_n,\, b_n,\, c_n & \textit{les coefficients de Fourier de } f \,, \\ a'_n,\, b'_n,\, c'_n & \textit{les coefficients de Fourier de } f' \,. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} a'_n &= nb_n \,, \qquad b'_n = -na_n \,, \qquad \textit{pour } n > 0 \\ a'_0 &= b_0 = 0 \\ c'_n &= inc_n \qquad \textit{pour } n \in \mathbb{Z} \,. \end{aligned}$$

Remarque 5. L'écriture a'_n, b'_n, c'_n est une notation. Il ne s'agit pas de dérivées ! !

Démonstration. Les relations entre les coefficients de Fourier de f et de f' sont montrées par intégration par parties. Par exemple, pour a'_n avec $n > 0$ on a :

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \big[f(x) \cos(nx) \big]_{x=-\pi}^{x=\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \right\} \\ &= n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\ &= nb_n \,. \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé le fait que $f(x)\cos(nx)$ est 2π-périodique, donc $f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi) = f(\pi)\cos(n\pi) - f(\pi)\cos(n\pi) = 0$. □

Pour calculer la somme de la série de Fourier de f', on applique le théorème de Dirichlet à f'.

Théorème 3. *Soit f une fonction 2π-périodique est C^1 par morceaux. Si*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

est la série de Fourier de f, alors la série de Fourier de f' est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)\big) .$$

Si la dérivée f' de f aussi est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge en tout $x \in \mathbb{R}$ vers

$$\frac{f'(x-) + f'(x+)}{2} ,$$

qui est égal à $f'(x)$ si f' est continue en x.

Exemple 7. On considère à nouveau la fonction f de l'exemple 5. Alors f' est la fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

avec

$$f'(-\pi+) = -1 = f'(0-) \qquad \text{et} \qquad f'(0+) = 1 = f'(\pi-) .$$

Les coefficients de Fourier de f sont calculés dans l'exemple 4 et sont :

a_n $(n \geq 0)$	b_n $(n \geq 0)$	c_n $(n \in \mathbb{Z})$
$\begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	0	$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \text{ est pair} \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Les coefficients de Fourier de f' sont calculés à partir de ceux de f en utilisant le lemme 3. Ils sont :

$a'_n = nb_n$ $(n \geq 0)$	$b'_n = -na_n$ $(n \geq 0)$	$c'_n = inc_n$ $(n \in \mathbb{Z})$
0	$\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{2i}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

La série de Fourier (en forme réelle et en forme complexe) de f' est

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) = \frac{-2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} e^{i(2n-1)x} .$$

Elle converge simplement vers la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ donnée sur $[-\pi, \pi[$ par

$$S(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi . \end{cases}$$

La somme S coincide avec la fonction f' sur chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ car sur chaque intervalle de ce type f' est définie et continue.

Théorème 4 (Formule de Plancherel (ou de Parseval)). *Si f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\,.$$

On remarque que la deuxième égalité dans la formula de Plancherel est conséquence des identités $|c_0|^2=\frac{a^2}{4}$ et

$$|c_n|^2=\frac{a_n^2+b_n^2}{4}=|c_{-n}|^2$$

pour $n>0$.