Université de Lorraine – Metz — Année universitaire 2015-2016

Séries et transformations (L2, EE-APR)

Feuille de TD n^0 4 : Séries numériques

Exercice 1 Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

(a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

(b) $u_n = \dfrac{2}{3^n}$.

En déduire la nature des séries et, si possible, leur somme.

Exercice 2 Déterminer si possible la somme des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{(n+1)(n+2)} \right]$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{inx}}{3^n}$ où x est un nombre réel fixé.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos(nx)}{3^n}$ où x est un nombre réel fixé.

[*Indication :* utiliser (d).]

Exercice 3 On pose $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

(a) Déterminer si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

(b) Déterminer si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Exercice 4 Déterminer par comparaison la nature de la série positive $\sum_{n\geq 1} u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \dfrac{1}{2^n + n}$,

(b) $u_n = \dfrac{2n^2 + 5n + 1}{\sqrt{5 + n^5}}$,

(c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.