Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2016-2017

Séries et transformations (L2, EE-APR)

Feuille de TD n^0 5 : Séries numériques : citères de convergence

Exercice 1 Étudier la nature des séries numériques suivantes :

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{2n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^2}}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n!$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-2}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Exercice 2 Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{5+n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}.$$

Exercice 3 .

(a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n}$ converge pour $2 < x < 4$ et diverge pour $x < 2$ et pour $x > 4$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ converge seulement pour $x = 0$.