Feuille de TD n^0 6 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 Déterminer la limite simple sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur I lorsque

(a) $I = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^n} \qquad (x \in I)$.

(b) $I = [0, 1]$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx} \qquad (x \in I)$.

Exercice 2 On considère la suite de functions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $I = [0, 1]$, où

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

(a) Montrer que la suite converge simplement sur I vers une fonction f à déterminer.

(b) Soit $n \geq 1$ fixé. Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{2}{n}$.

(c) Déduire de (b) que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{2}{n}$.

(d) Conclure que (f_n) converges uniformement vers f pour $n \to +\infty$.

Exercice 3 . Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{x - in}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Est-ce que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$? Déterminer, si possible, la limite de la suite (f_n) ainsi que les limites des suites parties réelles et parties imaginaires.

Exercice 4 Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ dans les cas suivants.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $I = [0, +\infty[$ et sur $I = [0, 1/2]$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3 + x^2}$ sur $I = [0, 1]$.

Exercice 5 Montrer que la série de functions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement mais pas absolument sur $[0, 1]$.

Exercice 6 On considère la série de functions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

(a) Montrer que cette série converge nomalement sur $\mathbb{R}$.

(b) On note S la somme de $\sum_{n\geq 1} f_n$. Montrer que S est dérivable s et $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 7 . On considère la function $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$.

(a) Déterminer la série de Taylor de f en x_0.

(b) Montrer que $f(x)$ est développable en série de Taylor dans un intervalle I qui contient x_0. En déduire la valeur de la somme de la série de Taylor dans un intervalle qui contient x_0.