

Rappels sur les fonctions

DÉFINITION 1. Une *fonction* $f : A \rightarrow B$ est définie par la donnée d'un ensemble de départ A , d'un ensemble d'arrivée B et d'une correspondance f mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec un unique élément de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ est appelé le *domaine de définition* de la fonction ; l'ensemble d'arrivée est appelé le *domaine de variation* de la fonction.

REMARQUE 1. On note par \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. Un *nombre réel* est obtenu en formant un développement décimal quelconque. \mathbb{R} se figure idéalement comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

Une fonction est usuellement notée par un nom. Il y a des fonctions spéciales (comme p.ex. les fonctions sin, cos, log, etc.) ou bien des fonctions génériques avec un nom générique (par ex. f , g , h , F , etc.). Les valeurs dans le domaine de définition sont indiquées par une variable, par ex x ou t ; les valeurs correspondantes sont notées par $f(x)$ ou $f(t)$.

EXEMPLE 1.

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2 \quad (x \in [-1, 1])$$

$$x \longmapsto x^2$$

sont les notations employées pour représenter la fonction (appelée f) avec domaine de définition $[-1, 1]$, domaine de variation \mathbb{R} et qui associe à chaque élément de $[-1, 1]$ son carré.

REMARQUE 2. A chaque élément x du domaine de définition d'une fonction f est toujours associé une valeur unique, c'est-à-dire $f(x)$. On peut toutefois avoir des éléments du domaine de variation de f qui ne sont pas de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de définition de x . Le domaine de variation ne doit être confondu avec l'*image* de la fonction f , qui est la partie des éléments du domaine de variation de f qui sont de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de variation de f . Dans l'exemple 2, le nombre -1 est un nombre réel, donc dans le domaine de variation de la fonction $f(x) = x^2$ ($x \in [-1, 1]$), mais -1 n'est pas un carré d'un nombre réel ; l'image de f , qui est formée par les éléments qui sont de la forme x^2 avec $x \in [-1, 1]$, est l'intervalle $[0, 1]$.

REMARQUE 3. Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction $f(x)$, s'il n'est pas donné, on regarde les valeurs x , où l'expression $f(x)$ ne peut pas être définie. Par exemple :

- (1) La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour tout $x \neq 0$ (car on ne peut pas diviser par 0). Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (2) La fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ (en tant que fonction à valeurs réels) est définie pour tout x tel que $x-1 \geq 0$ (car $x-1$ doit être nonnegatif pour avoir une racine carrée réelle). Son domaine de définition est donc $[1, +\infty[$.

DÉFINITION 2. Le *graphe* (ou *courbe représentative*) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f . On dit aussi que l'équation du graphe de f est $y = f(x)$.

1. Propriétés élémentaires

Par la suite, I note une partie de \mathbb{R} , comme par exemple un intervalle (fini ou infini) ou une union d'intervalles.

REMARQUE 4. On utilisera la notation suivante pour les intervalles :

- (1) $]a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x < b$;
- (2) $[a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x \leq b$;
- (3) $[a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x < b$;
- (4) $]a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x \leq b$;

DÉFINITION 3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie I de \mathbb{R} telle que $-x \in I$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

- EXEMPLE 2. (a) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Soit $\mathbb{R} \setminus \{0\} :=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

REMARQUE 5. La fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f ; la fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie du graphe de f .

DÉFINITION 4. Soit $T > 0$. On dit que T est une *période* de la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in I$ tel que $x + T \in I$. Dans ce cas on dit que f est *périodique*.

- EXEMPLE 3. (a) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition \mathbb{R} ; $\sin(x)$ est impaire et $\cos(x)$ est paire.
- (b) Le domaine de définition de $f(x) = \tan(x)$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ [ici \mathbb{Z} note l'ensemble des nombres entiers]. La fonction $\tan(x)$ est périodique de période π .

DÉFINITION 5. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

- *croissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strictement croissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$;
- *décroissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strictement décroissante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$;
- *constante sur I* , si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$.

EXEMPLE 4. La fonction $f(x) = x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et $g(x) = -x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} ; la fonction h définie par $h(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante.

2. Exemples

2.1. Fonctions affines. Une *fonction affine* est définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R})$$

où a et b sont des constantes. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Si $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont deux points quelconques de la droite, alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

est appelé la *pente* de la droite; $b = f(0)$ est le point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées. Si $b = 0$, alors le graphe passe pour l'origine du repère et f est appelé une *fonction linéaire*.

f est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

2.2. Trinôme du second degré. La fonction définie par un *trinôme du second degré* est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son graphe est une parabole. Si $a > 0$, alors le sommet est un minimum; si $a < 0$, il est un maximum. L'abscisse et l'ordonnée du sommet sont

$$x_s = -\frac{b}{2a}, \quad y_s = f(x_s) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Les solutions de $f(x) = 0$ donnent, si elles existent, l'abscisse des points où graphe de f coupe l'axe de x . L'existence de ces solutions dépend de la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, on a les 2 solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, on a les 2 solutions réelles coïncidentes

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles.

REMARQUE 6. Si $\Delta \geq 0$, alors l'abscisse x_s du sommet est la moyenne de x_1 et x_2 , c'est-à-dire $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (la droite d'équation $x = x_s$ est l'axe de symétrie de la parabole qui représente le graphe de f). Puisque x_s est pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ l'abscisse d'un minimum si $a > 0$ et d'un maximum si $a < 0$, il peut également être déterminé en résolvant l'équation $f'(x) = 0$, où f' dénote la dérivée de f . Donc $x_s = -\frac{b}{2a}$, car $f'(x) = 2ax + b$.

2.3. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques les plus importantes sont les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition \mathbb{R} . Leur image est l'intervalle $[-1, 1]$. Le domaine de définition de la fonction $\tan x$ est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et celui de la fonction $\cot x$ est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Elles sont périodiques de période π et leur image est \mathbb{R} .

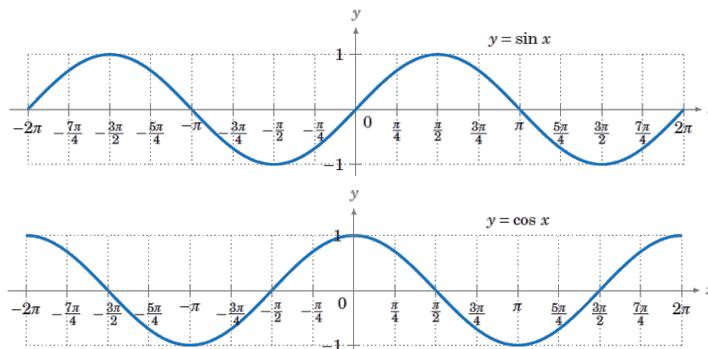


FIGURE 1. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$

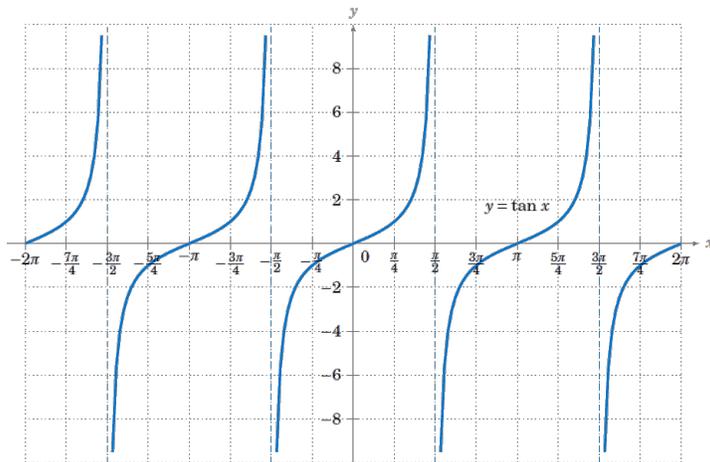


FIGURE 2. La fonction $\tan x$

2.4. Fonctions exponentielles et logarithmes. Soit $a > 0$ fixé. La fonction exponentielle en base a est définie par la relation

$$f(x) = a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La forme du graphe de la fonction exponentielle dépend de a . Elle est croissante pour $a > 1$, décroissante pour $0 < a < 1$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $a = 1$. Voir figure 3.

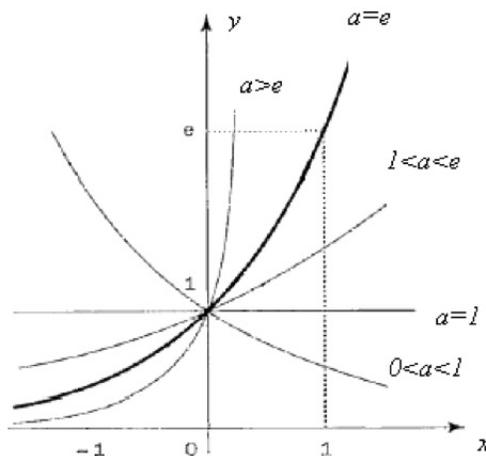


FIGURE 3. Graphe de la fonction $y = a^x$

Propriétés fondamentales :

- $a^x > 0$;
- $a^x a^t = a^{x+t}$;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (car $a^{-x} a^x = a^{x-x} = a^0 = 1$);

- $(a^x)^t = a^{xt}$.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La *fonction logarithme en base a* est la fonction

$$f(x) = \log_a x \quad (x \in]0, +\infty[)$$

définie par la relation

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

On suppose, par exemple, que $a = 10$. Alors $\log_{10} 1000 = 3$ car $1000 = 10^3$.

Comme pour la fonction exponentielle, la forme du graphe de la fonction logarithme dépend de la valeur de a . Voir figure 4. Plus précisément, le graphe de $y = \log_a x$ est symétrique au graphe de $y = a^x$ par rapport à la droite $y = x$.

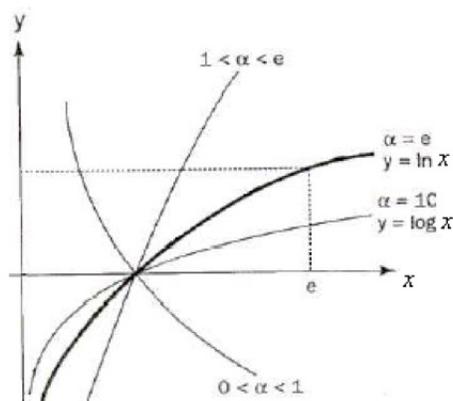


FIGURE 4. Graphe de la fonction $y = \log_a x$

Propriétés fondamentales :

- $\log_a (xt) = \log_a x + \log_a t$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a (1/x) = -\log_a x$ (car $\log_a (1/x) + \log_a (x) = \log_a (1/x \cdot x) = \log_a 1 = 0$) ;
- $\log_a (x^r) = r \log_a x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deux valeurs importantes de la base a sont les suivantes :

- (a) $a =$ la *constante e d'Euler* (appelée aussi *nombre exponentiel* ou *nombre de Néper*). Elle vaut approximativement 2,718... Une des propriétés fondamentales de la constante e est liée à la croissance de la fonction exponentielle e^x .

La fonction $\log_e x$ est notée $\ln x$ et s'appelle *logarithme népérien* (ou *naturel*).

- (b) $a = 10$. Dans ce cas, la fonction $\log_{10} x$ est notée $\log x$.

Propriétés :

- (a) Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

- (b) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{(\ln a)x}.$$

En particulier : Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$10^x = e^{(\ln 10)x}.$$

Ici $\ln 10 \approx 2,3026\dots$

2.5. Fonctions puissances. Si n est un nombre entier positif, on connaît la fonction puissance $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}$, qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est aussi une fonction puissance, mais elle est définie seulement pour $x \geq 0$. En général, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *fonction puissance*

$$f(x) = x^\alpha$$

a domaine de définition égal à :

- \mathbb{R} , si $\alpha \in \mathbb{N}$
- \mathbb{R} , si $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, q impair et $q \neq 0$. Dans ce cas $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.
- $]0, +\infty[$ dans toutes les autres cases. Dans ces cases $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$. Pour $\alpha \geq 0$ on peut étendre le domaine de définition de x^α à $[0, +\infty[$ en posant $0^\alpha := 0$.

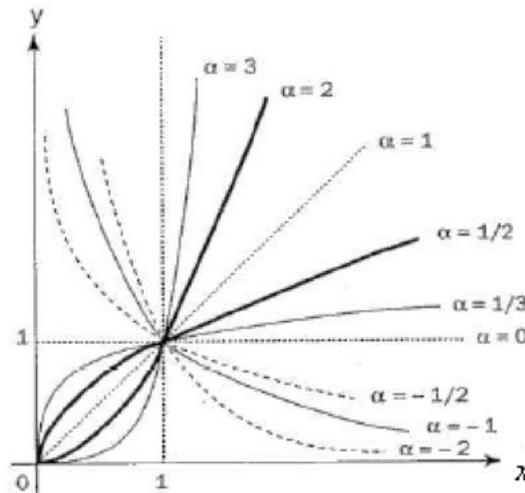


FIGURE 5. Graphe de la fonction $y = x^\alpha$

Propriétés fondamentales :

- $x^\alpha > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$;
- $x^\alpha t^\alpha = (xt)^\alpha$;
- $1^\alpha = 1$;
- $(1/x)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$ (car $(1/x)^\alpha x^\alpha = 1^\alpha = 1$);
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

La forme du graphe de la fonction puissance $y = x^\alpha$ dépend du valeur de α . Elle est croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $\alpha = 0$. Voir figure 5.