Chapitre 2

Nombres complexes

C'est bien connu que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans l'ensemble des nombres réels, car une solution x devrait satisfaire $x^2 = -1$, c'est-à-dire son carrée doit au même temps être positive (car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et négative (égale à -1). Le problème est que l'ensemble des nombres réels est “trop petit”. Ceci est un problème qu'on connaît déjà en cherchant des solutions entières : il n'y a pas de nombre entier x qui est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$, car 3 n'est pas le carré d'un nombre $x \in \mathbb{Z}$. L'équation $x^2 - 3 = 0$ admet les solutions $\pm\sqrt{3}$ si on "enlarge" l'ensemble des nombres entiers aux nombres réels. L'ensemble des nombres où l'équation $x^2 + 1 = 0$ (ainsi que chaque équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$) admet 2 solutions est l'ensemble des nombres complexes. Les nombres complexes constituent à la fois un outil mathématique puissant et une théorie mathématique importante. Une application remarquable est que ces nombres permettent de décrire une rotation du plane comme une simple multiplication.

Définition 1. Un *nombre complexe* est un nombre de la forme $z = a + bi$ où a et b sont des réels quelconques et i est un symbole tel que $i^2 = -1$. Le nombre a est appelé la *partie réelle de* z, notée $\operatorname{Re} z$; le nombre b est appelé la *partie imaginaire de* z, notée $\operatorname{Im} z$. Le symbole $a+bi$ s'appelle la *forme algébrique* du nombre complexe z. Si $b = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel ; si $a = 0$, alors $z = bi$ s'appelle un *nombre imaginaire pur*.

On note par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2 (Egalité de deux nombres complexes). Deux nombres complexes $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont égaux lorsque $a = c$ et $b = d$.

Tout nombre complexe peut être représenté comme un point du *plan complexe*, c'est-à-dire un plan muni d'un repère orthonormé. Le point $z = a+bi$ correspond au point d'abscisse a et ordonnée b. Les points de l'axe des abscisses sont donc les nombres réels et ceux de l'axe des ordonnées les nombres imaginaires pures.

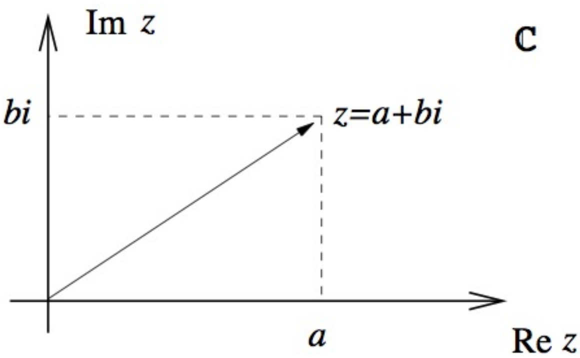


Figure 1. Représentation du point $z = a + bi$ dans le plan complexe

Opérations entre nombres complexes

DÉFINITION 3. La *somme* de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $w = c + di \in \mathbb{C}$ est le nombre complexe $z + w = (a + c) + (b + d)i$ obtenu en sommant les parties réelles et les parties imaginaires de z et w.

EXEMPLE 1. $(3 + i) + (\sqrt{2} - 2i) = (3 + \sqrt{2}) - i$.

REMARQUE 1. Si on représente z et w sur le plan complexe, alors $z + w$ est la somme des vecteurs z et w par la règle du parallélogramme.

DÉFINITION 4. Le *produit* de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $w = c + di \in \mathbb{C}$ est le nombre complexe zw obtenu en appliquant les lois distributives, associatives et commutatives usuelles des nombres réels ainsi que la règle $i^2 = -1$: donc

$$zw = (a + bi)(c + id) = a(c + id) + bi(c + id) = ac + adi + bci + bd(i^2) = (ac - bd) + (ad + bc)i\,.$$

EXEMPLE 2. $(3 + i)(\sqrt{2} - 2i) = 3(\sqrt{2} - 2i) + i(\sqrt{2} - 2i) = (3\sqrt{2} + 2) + (\sqrt{2} - 6)i$.

DÉFINITION 5. Le *conjugué* de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$.

REMARQUE 2. $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

DÉFINITION 6. Le *module* de $z = a + bi \in \mathbb{C}$ est le nombre réel non-négatif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

REMARQUE 3. $|z|$ est la distance entre z et l'origine O du repère.

EXEMPLE 3. Le module de $z = 3 + 2i$ est $|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

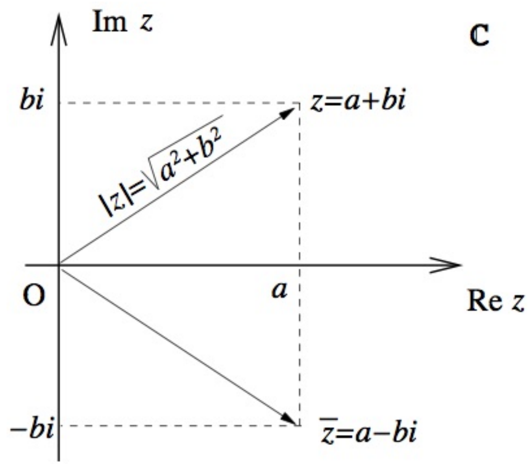


FIGURE 2. Le conjugué et le module du point $z = a + bi$

Propriétés du conjugué : Pour tout $z = a + bi \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{C}$ on a :

(a) $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im}\overline{z} = -\operatorname{Im} z$;

(b) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ et $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$;

(c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(d) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(e) $|\overline{z}| = |z|$;

(f) $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Remarque 4. On peut diviser deux nombres complexes comme dans l'exemple suivant :

$$\frac{3+2i}{1+4i} = \frac{(3+2i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{11-10i}{1+16} = \frac{11}{17} - \frac{10}{17}i\,.$$

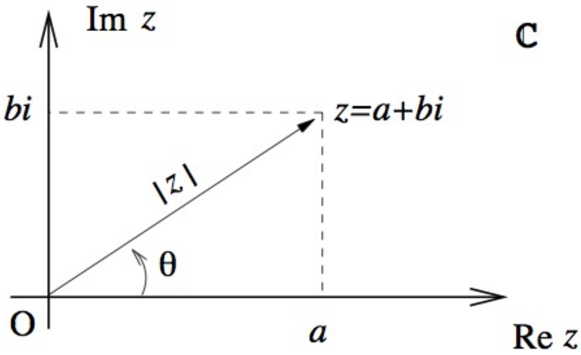
En général, si $w \neq 0$, alors

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}\,.$$

En particulier, $\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$. On remarque aussi que $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

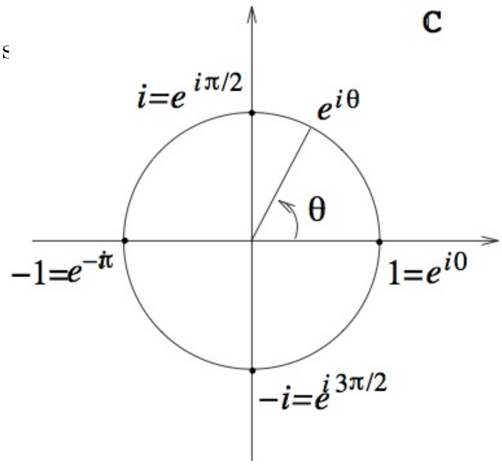
Définition 7. L'argument $\arg(z)$ de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est tout mesure θ (en radians) de l'angle entre z et l'axe des abscisses (voir figure). Donc $\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a : $\begin{cases} \theta = \arg(z) \\ a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{cases}$.



On pose

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,s$$



Remarque 5. .

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|z| = 1$ si et seulement si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 6. On a $e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta i$ et $e^{-i\theta} = \cos\theta - \sin\theta i = \overline{e^{i\theta}}$, d'où les *formules d'Euler*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\,.$$

La *forme trigonométrique* du nombre $z = a + bi$ est

$$z := r(cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Remarque 7. (a) On a $e^{i\theta}e^{i\sigma} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\sigma + i\sin\sigma) = (\cos\theta\cos\sigma - \sin\theta\sin\sigma) + (\sin\theta\cos\sigma + \cos\theta\sin\sigma)i = \cos(\theta+\sigma) + \sin(\theta+\sigma)i = e^{i(\theta+\sigma)}$.

(b) Si $z = re^{i\theta}$ et $w = se^{i\sigma}$, alors
$$zw = rse^{i(\theta+\sigma)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}\,.$$
En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la *formule de Moivre*
$$z^n = r^n e^{in\theta}\,.$$

Exemple 4. (1) La forme trigonométrique de $z = 1+i$ est $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ car $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ et $|z| = \sqrt{2}\,$.

(2) La forme algébrique de $z = 2e^{i\pi/6}$ est $z = 2\cos(\pi/6) + 2\sin(\pi/6)i = \sqrt{3} + i$.

(3) Pour $z = 2e^{i\pi/6}$ et $w = 3e^{i\pi/4}$ on a $zw = 6e^{i(\pi/6+\pi/4)} = 6e^{i\pi/2} = 6i$ et $\frac{z}{w} = \frac{2}{3}e^{i(\pi/3-\pi/4)} = \frac{2}{3}\, e^{i\pi/12}\,$.

1. Nombres complexes et rotations

Soient $z = a + bi = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$. Le produit $e^{i\alpha}z = re^{i(\theta+\alpha)}$ donne la rotation de centre 0 du point z d'un angle α en sens antihoraire.

Exemple 5. La multiplication par $i = e^{i\pi/2}$ correspond à une rotation d'angle $\pi/2$

Exemple 6. Soit r la rotation de centre 0 et angle $5\pi/6$ et soit P le point de coordonnées $(\sqrt{3}, 1)$. Déterminer $Q := r(P)$.

On identifie P avec $z := \sqrt{3} + i \in \mathbb{C}$. On a $|z| = 2$ et, si $\theta = \arg(z)$, alors $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ et $\sin\theta = 1/2$, d'où $\theta = \pi/6$. Comme $e^{i5\pi/6} \cdot 2e^{i\pi/6} = -2$, on obtient $Q = (-2, 0)$.

2. Équations de second degré à coefficients réels

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation de la forme
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,. \tag{*}$$
On remarque que $(\pm i)^2 = i^2 = -1$, d'où $\sqrt{-1} = \pm i$. Si $\alpha \geq 0$, alors $\sqrt{-\alpha} = \sqrt{-1}\sqrt{\alpha} = \pm i\sqrt{\alpha}$.

Les solutions de (*) sont donc :

- Si $\Delta > 0$, on a les 2 solutions réelles distinctes
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$
- Si $\Delta = 0$, on a les 2 solutions réelles coïncidentes
$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}\,.$$
- Si $\Delta < 0$, on a les 2 solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

Exemple 7. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont
$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$