Chapitre 4

Séries numériques

1. Séries numériques convergentes et divergentes

En mathématiques, les séries généralisent la notion de sommes finies.

Le but est celui de calculer, si possible, la somme des termes d'une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n\geq 0}$. On peut former les sommes finies d'un, deux, trois, $\ldots, n, n+1, \ldots$. termes de la série donnée (pris dans leur ordre) :

$$u_0, \quad u_0+u_1, \quad u_0+u_1+u_2, \quad \cdots \quad , \quad u_0+u_1+\cdots+u_n, \quad \cdots$$

On obtient ainsi une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de sommes finies

$$S_n = u_0+u_1+...+u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une série numérique. La *série numérique de terme général* u_n est la donnée d'une suite numérique $(S_n)_{n\geq 0}$ où, pour tout $n\geq 0$, on a $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$. On note cette série par $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Le nombre S_n, qui est donc la somme des premiers $n+1$ termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, est dit la *somme partielle n-ème* (ou *somme partielle d'indice* n) de la série par $\sum_{n\geq 0} u_n$. La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est aussi appelée *la suite des sommes partielles* de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple 1 (Série géométrique). La *série géométrique* est la série numérique dont le terme général est de la forme $u_n = a^n$ où $a\in\mathbb{C}$, c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 0} a^n$. Le nombre complexe a s'appelle la *raison* de cette série. Le terme initial est $a^0=1$. La suite des sommes partielles de cette série est $(S_n)_{n\geq 0}$ où

$$S_0 = a^0 = 1\,, \quad S_1 = a^0+a^1 = 1+a\,, \quad \ldots, S_n = a^0+a^1+\cdots+a^n\,, \ldots$$

On peut calculer S_n :

- Si $a\neq 1$:

$$\begin{aligned} (1-a)S_n &= (1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) \\ &= 1+a+a^2+\cdots+a^n \\ &\qquad -a-a^2+\cdots-a^n-a^{n+1}) \\ &= 1-a^{n+1}\,, \end{aligned}$$

  d'où $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

- Si $a=1$:

$$S_n = \underbrace{1+\cdots+1}_{(n+1)\text{-fois}} = n+1\,.$$

Par exemple : $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ est la série géométrique de terme général $a^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Sa somme partielle n-ème est

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}\,\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\,.$$

Remarque 1. On peut considérer des séries $\sum_{n\geq n_0}u_n$ (ou $\sum_{n=n_0}^{\infty}u_n$) où n_0 est un nombre entier fixé. Dans ce cas, la suite des sommes partielles n-èmes est $(S_n)_{n\geq n_0}$, où

$$S_n=u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n=\sum_{k=n_0}^{n}u_k\,.$$

Par exemple, si $a\neq 1$, la somme partielle n-ème de la série géométrique de raison a et terme initial a^{n_0} est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=n_0}^{n}a^n=a^{n_0}+a^{n_0+1}+\cdots+a^n && (1)\\ &= a^{n_0}(1+a+a^2+\cdots+a^{n-n_0}) && (2)\\ &= a^{n_0}\frac{1-a^{n-n_0+1}}{1-a}\,. && (3)\end{aligned}$$

On remarque aussi que la formule pour la somme partielle S_n d'une série géométrique de raison a est

$$S_n=\text{premier terme}\cdot\frac{1-a^{\text{nombre de termes qu'on somme}}}{1-a}\,.$$

Par exemple, la somme partielle n-ème de la série géometrique $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ est

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3^2}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3^2}\,\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Exemple 2 (Série télescopique). Une *série télescopique* est une série numérique de la forme $\sum_{n\geq 1}u_n$ avec la propriété qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n=a_n-a_{n+1}$ pour tout $n\geq 0$.

La somme partielle n-ème de cette série est

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}u_k=u_0+\cdots+u_n\\ &= (a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n+1})\\ &= a_0-a_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Plus généralement, on peut considérer des séries télescopiques $\sum_{n\geq n_0}u_n$ (ou $\sum_{n=n_0}^{\infty}u_n$) où n_0 est un nombre entier fixé et $u_n=a_n-a_{n+1}$ pour tout $n\geq n_0$.

Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ est télescopique. En effet, $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, d'où

$$u_n=a_n-a_{n+1}\qquad\text{with}\qquad a_n=\frac{1}{n}\,.$$

Sa somme partielle n-ème est

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Définition 2. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est *convergente*, si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de ses sommes partielles est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est *divergente*. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors la limite $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est dite la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On écrit alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exemple 3. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Démonstration. Supposons d'abord $a \neq 1$. Dans ce cas, $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. On rappelle que la nature de la suite géométrique (a^{n+1}) a été donnée dans l'exemple 12.

- Si $|a| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$. La série est donc convergente de somme égale à $\frac{1}{1-a}$.
- Si $|a| \geq 1$ (avec $a \neq 1$) , alors la suite (a^{n+1}) est divergente, donc (S_n) est divergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ est divergente.

Supposons maintenant que $a = 1$. Dans ce cas, $S_n = n + 1$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc la série est divergente. □

Par exemple, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{3^n}$ est convergente, car $\left|\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$. La somme de cette série est $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Exemple 4. On considère la série télescopique $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout n. Cette série est convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$est convergente. Si $\lim_{n\to=\infty} a_n = a$, alors la somme de la série est $a_0 - a$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_0 - a$

Démonstration. D'après l'exemple 2, la somme partielle n-ème S_n de $\sum_{n\geq 0} u_n$ est égale à $S_n = a_{n+1} - a_0$. Par définition, la série est convergente si et seulement si la suite (S_n) est convergente et donc si et seulement si la suite (a_n) est convergente. Dans ce cas, la somme de la série vaut

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_0 = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0 = a - a_0$$

. □

Par exemple, la série télescopique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ est convergente, car la suite (S_n) est convergente. En effet (voir exemple 2), on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$. La somme de la série vaut 1.

Remarque 2. (1) Déterminer la nature d'une série, c'est dire si elle converge ou diverge. C'est un problème différent que calculer la somme d'une série en cas de convergence. Dans certains cas, comme pour la série géométrique ou lorsqu'on peut calculer S_n par une formule exacte, les deux problèmes peuvent être traités simultanément. Dans la plupart des cas, toutefois, on a des critères qui nous assurent qu'une série converge sans nous permettre de calculer sa somme.

(2) Soit N un nombre entier ≥ 0 fixé et on considère les séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq N+1} u_n$. Si on note S_n la somme partielle n-ème de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et T_n la somme partielle n-ème de la série $\sum_{n\geq N+1} u_n$, alors pour $n \geq N$ on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k = S_N + T_n\,.$$

Puisque S_N est une constante (qui ne dépend pas de n), on obtient que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} T_n$ existe. Les deux séries ont donc même nature et, en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S_N + \lim_{n\to+\infty} T_n = S_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n .$$

Règles de calcul pour les séries convergentes :

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ and $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques convergentes, de sommes $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ et $T = \sum_{n\geq 0} v_n$ respectivement, et soit c un nombre réel ou complexe. Alors la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n)$, qui a terme général $u_n + v_n$, et la série $\sum_{n\geq 0} cu_n$, qui a terme général cu_n, sont convergentes et ont sommes

$$\sum_{n\geq 0}(u_n + v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = S + T \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} cu_n = c\sum_{n\geq 0} u_n = cS .$$

Définition 3. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique convergente. Le *reste d'ordre N* de cette série est le nombre $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_N + R_N$, c'est-à-dire

$$R_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - S_N = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_N .$$

Proposition 1. *On a $\lim_{n\to+\infty} R_N = 0$.*

Démonstration. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Donc S est une constante et on a :

$$\lim_{N\to+\infty} R_N = \lim_{N\to+\infty}(S - S_N) = S - \lim_{N\to+\infty} S_N = S - S = 0 .$$

$\square$

Lemme 1. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Démonstration. Soient S_n la somme partielle n-ème de la série $\sum u_n$ et S sa somme. Puisque $u_n = S_n - S_{n-1}$, on a donc :

$$\lim_{N\to+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{N\to+\infty} S_n - \lim_{N\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0 .$$

$\square$

Remarque 3. (1) Souvent on utilise le lemme précedent par contraposition : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Par exemple : la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ est divergente, car la suite $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0. (En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1$).

(2) La propriété réciproque du lemme précédent n'est pas vraie : il y a des séries $\sum u_n$ qui divergent même si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Un exemple est la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, qui est divergente, même si $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ s'appelle la série harmonique. On montera qu'elle est divergente dans l'exemple 10.

2. Séries à termes positifs

Définition 4. On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est *à termes positifs* si u_n est un nombre réel ≥ 0 pour tout n.

Exemple 5. (1) Si a est un nombre réel non-négatif, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} a^n$ est à termes positifs.

(2) La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs.

Remarque 4. Si $\sum u_n$ est à termes positifs, alors la suite (S_n) des sommes partielles de $\sum u_n$ est une suite croissante de nombres réels. En effet, $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$ pour tout n.

Par conséquent :

- ou bien (S_n) converge vers $S \geq 0$ et donc $\sum u_n = S$ (et ceci a lieu si et seulement si (S_n) est majorée),
- ou bien (S_n) diverge vers $+\infty$ et on écrit $\sum u_n = +\infty$ (et ceci a lieu si et seulement si (S_n) n'est pas majorée).

Remarque 5. On écrit souvent pour une suite à termes positifs $\sum u_n$ (et seulement pour une suite à termes positifs) : $\sum u_n = +\infty$ si la suite diverge ; $\sum u_n < \infty$ si la suite converge.

Remarque 6. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On a vu que si les deux séries convergent et ont somme $\sum u_n = S$ et $\sum v_n = T$, alors la série somme $\sum(u_n + v_n)$ (qui est aussi une série à termes positifs) est convergente et sa somme vaut $S + T$. D'autre part, si l'une (au moins) des deux séries est divergente, alors leur somme $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Proposition 2. *Une série à termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.*

Exemple 6. Pour tout $n \geq 2$ on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge. En effet, pour tout $n \geq 2$, la somme partielle n-ème S_n de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ satisfait :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1+\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1+1-\frac{1}{n} \leq 2\,.$$

Ainsi la suite (S_n) est majorée par la constante 2.

Les règles suivantes nous permettent de dire si une série à termes positifs converge ou pas, sans donner la valeur de sa somme en cas de convergence.

Proposition 3 (Règle de comparaison). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que*

$$0 \leq u_n \leq v_n \qquad \textit{pour tout indice } n\,.$$

Alors :

(a) *Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. En cas de convergence, si S et T dénotent respectivement les sommes de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$, on a $S \leq T$.*

(b) *Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Exemple 7. Pour tout $n \geq 2$ on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Or,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

est la série télescopique convergente considérée dans l'exemple 4. Sa somme vaut 1. Par conséquent, la proposition 3 entraîne que $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et que sa somme S satisfait $S \leq 1$.

Exemple 8. On a déjà mentionné que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente (voir exemple 10 pour la démonstration de cette propriété). Par comparaison, on obtient que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est aussi divergente. En effet, on a $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n.

Corollaire 1 (Règle d'équivalence). *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons que* $v_n \neq 0$ *pour tout* n *et que* $u_n \sim v_n$. *Alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Exemple 9. (1) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$ converge car $\dfrac{n^2+1}{n^4+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

(2) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^3+2}{n^4+1}$ diverge car $\dfrac{n^3+2}{n^4+1} \sim \dfrac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

L'exemple qui suit est souvant utilisé dans la comparaison de séries à termes positifs.

Exemple 10 (Série de Riemann). Soit α un nombre réel positif fixé. La *série de Riemann* est la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$. Cette série

- converge si $\alpha > 1$,
- diverge si $0 < \alpha \leq 1$.

La série de Riemann pour $\alpha = 1$ coincide avec la série harmonique.

On montrera cette propriété dans l'exemple 10. On remarque ici que la divergence de la série de Riemann pour $0 < \alpha < 1$ est une conséquence de celle de la série harmonique : en effet, dans ce cas, on a $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout n. De même, la convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 2$ est une conséquence de celle de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2}$, car dans ce cas $\dfrac{1}{n^\alpha} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout n.

Par comparaison avec la série de Riemann, on obtient la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

(a) *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*

(b) *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que la suite* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Exemple 11. La série $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est convergente. En effet, il s'agit d'une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$.

Proposition 5 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes strictement positifs (c'est-à-dire* $u_n > 0$ *pour tout* n*). On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *converge avec* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

- *Si* $L < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $L = 1$, *on ne peut rien dire à priori.*

Exemple 12. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{2^n}{n!}$ converge. En effet,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

et donc

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1\,.$$

Remarque 7. Si $L = 1$, la règle de d'Alembert ne donne aucune information. Considérons par exemple la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^\alpha$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^{\alpha} = 1\,.$$

On a vu dans l'exemple 17 que si $\alpha > 1$ alors la série de Riemann converge, tandis que si $\alpha \leq 1$, alors la série diverge. De même, on a $L = 1$ dans les deux cas.

Proposition 6 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $\big(\sqrt[n]{u_n}\big)$ converge avec $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.*

- *Si $L < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*
- *Si $L = 1$, on ne peut rien dire à priori.*

Exemple 13. Soient a un nombre réel > 0 et n_0 un entier nonnégatif tels que $n_0 > \dfrac{1}{a}$ (donc $a > \dfrac{1}{n_0} \geq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq n_0$). Alors la série $\sum_{n\geq n_0} \Big(a - \dfrac{1}{n}\Big)^n$ est à termes positifs. Si l'on pose $u_n = \Big(a - \dfrac{1}{n}\Big)^n$, alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \Big[\Big(a - \frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{n}} = a - \frac{1}{n}\,,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a\,.$$

Donc la série $\sum_{n\geq n_0} \Big(a - \dfrac{1}{n}\Big)^n$:

- converge si $a < 1$,
- diverge si $a < 1$.

On ne peut rien dire à priori si $a = 1$.

Remarque 8. Pour comparer les règles de Cauchy et de d'Alembert, on peut montrer la propriété suivante. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la suite $\big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\big)$ admet la limite L lorsque $n \to +\infty$, alors la suite $\big(\sqrt[n]{u_n}\big)$ admet la même limite L. Par conséquent, si on trouve avec la règle de d'Alembert un cas douteux (c'est-à-dire un cas pour lequel $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$), il est inutile d'essayer de déterminer la nature de la même série avec la règle de Cauchy, car elle aussi donnerait le cas douteux $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$.

Définition 5. Soit $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue à valeurs ≥ 0 qui possède une primitive $F(x)$ (c'est-à-dire, $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, +\infty[$). Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

possède une limite finie lorsque b tend vers $+\infty$. On dit alors que l'*intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente. Sa valeur est le nombre réel

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \big(\lim_{b\to+\infty} F(b)\big) - F(a)\,.$$

Si la limite $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ n'existe pas, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

Remarque 9. Pour tout $b > a$ fixé, l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ est l'aire de la surface bornée par l'axe des abscisses, le graphe de la fonction f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. De même, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ est la valeur de l'aire de la surface bornée par l'axe des abscisses, le graphe de f et la droite d'équation $x = a$. Afin que cette aire soit finie, il faut donc que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Cette condition est nécessaire, mais pas sufficiente : si f ne satisfait pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ne peut pas être convergente ; il y a toutefois des fonctions f satisfaisant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, mais qui ne tendent pas vers 0 "assez rapidement" pour garantir que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente. C'est par exemple le cas de $f(x) = \frac{1}{x}$: on a bien $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ n'est pas convergente ; voir l'exemple 15.

Exemple 14. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ est convergente et on a $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$.

En effet, $F(x) = -e^{-x}$ est une primitive de $f(x) = e^{-x}$ (car $F'(x) = f(x)$ pour tout x). Pour $b > 0$ on a

$$\int_0^b e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=b} = (-e^{-b}) - (-e^{-0}) = 1 - e^{-b}\,,$$

d'où la limite

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1$$

existe.

Exemple 15. Soit $\alpha > 0$ un nombre réel fixé. On montre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est

- convergente si $\alpha > 1$,
- divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

En effet, on a pour $b > 0$

$$\int_0^b x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-\alpha}\, x^{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=b} = \dfrac{1}{\alpha-1}(b^{-\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln(x)\right]_{x=1}^{x=b} = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Alors

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-\alpha+1} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b^{-\alpha+1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1\,, \\ 0 & \text{si } \alpha > 1\,. \end{cases}$$

D'autre part, pour $\alpha = 1$, on a $\lim_{b\to+\infty} \ln(b) = +\infty$.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx$ est convergente, avec $\int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$ et divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Remarque 10. (a) Supposons que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout x. Si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge ; Si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge.

(b) Si $f(x) \sim g(x)$ pour $x \to +\infty$ (c'est-à-dire, si $f(x), g(x) \neq 0$ pour x large et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$), alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ ont même nature.

Proposition 7 (Règle intégrale de Cauchy). *Supposons que pour tout indice n on a $u_n = f(n)$ où $f(x)$ est une fonction positive, décroissante et continue pour $x \geq a \geq n_0$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ont même nature.*

Exemple 16. D'après la règle intégrale de Cauchy et l'exemple 14, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ converge.

Remarque 11. La règle intégrale de Cauchy permet d'établir la nature d'une série à termes positifs, mais ne donne pas d'informations sur sa somme. L'exemple 14 montre que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$. Toutefois cette valeur n'est pas la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$. En effet, en remarquant que $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-1}\right)^n$ est une série géométrique, on trouve que sa somme vaut $\frac{1}{1-e^{-1}}$ (et pas 1).

Exemple 17. En appliquant la règle intégrale de Cauchy à $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $0 < \alpha < +\infty$ fixé et $n_0 = a = 1$, on obtient d'après l'exemple 15 : que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha \leq 1$. En particulier, la série harmonique (qui est la série de Riemann pour $\alpha = 1$) est divergente.

3. Séries alternées

Définition 6. On appelle *série alternée* toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle de signe constant.

Exemple 18. La *série harmonique alternée* est la série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}$. Plus géneralement, si $\alpha > 0$ est fixé, la *série de Riemann alternée* $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ est une série alternée.

Proposition 8 (Critère de Leibniz). *Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 pour $n \to +\infty$. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.*

Exemple 19. D'après le critère de Leibniz, la série harmonique alternée $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente. En effet, le terme général de cette série est de la forme $(-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ et on a :

- $a_n \geq 0$ pour tout n,
- $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n$ pour tout n, i.e. (a_n) est une suite décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

De même, on peut vérifier avec le critère de Leibniz que, si $\alpha > 0$ est fixé, alors la série de Riemann alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

4. Séries absolument convergentes et semi-convergentes

Définition 7. Une série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 20. Soit x un nombre réel fixé. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n^2}$ converge absolument. En effet, dans ce cas,

$$u_n = \frac{e^{inx}}{n^2}\,, \qquad |u_n| = \left|\frac{e^{inx}}{n^2}\right| = \frac{|e^{inx}|}{n^2} = \frac{1}{n^2}\,,$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

La convergence absolue d'une série est une condition plus forte de la convergence, c'est-à-dire on a la propriété suivante.

Proposition 9. *Toute série absolument convergente est convergente.*

La propriété réciproque n'est pas vraie, en général : la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente, tandis que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Plus généralement, la série de Riemann alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ est toujours convergente pour $\alpha > 0$, tandis que la séries de Riemann est divergente pour $0 < \alpha \leq 1$.

Définition 8. Une série $\sum u_n$ qui est convergente mais pas absolument convergente est dite *semi-convergente.*

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}$ ainsi que les séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ avec $0 < \alpha \leq 1$ sont donc semi-convergentes.

Les régles de convergence des séries positives, appliquées à la série des modules $\sum |u_n|$ permettent d'établir la convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$. On indique à titre d'exemple les applications des règles d'Alembert et de Cauchy à l'étude de la convergence absolue des séries numériques.

Proposition 10. *Soit $\sum u_n$ une série numérique réelle ou complexe telle que $u_n \neq 0$ pour tout n.*

(a) (règle de d'Alembert) *On suppose que la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *converge et* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$.
- *Si $L < 1$, alors $\sum |u_n|$ est convergente, donc $\sum u_n$ converge absolument.*
- *Si $L > 1$, alors $\sum |u_n|$ est divergente.*
- *Si $L = 1$, on ne peut rien dire à priori.*

(b) (règle de de Cauchy) *On suppose que la suite* $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)$ *converge et* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = L$.
- *Si $L < 1$, alors $\sum |u_n|$ est convergente, donc $\sum u_n$ converge absolument.*
- *Si $L > 1$, alors $\sum |u_n|$ est divergente.*
- *Si $L = 1$, on ne peut rien dire à priori.*

Exemple 21. On montre au moyen de la règle de d'Alembert que la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{inx}}{n!}$ converge absolument pour $x \in \mathbb{R}$ fixé. En effet : $u_n = \dfrac{e^{inx}}{n!}$ et $|u_n| = \dfrac{1}{n!} \neq 0$. Donc $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0 < 1$.