

Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions

DÉFINITION 1. Soit I un intervalle (borné ou pas borné) de \mathbb{R} . Une *suite de fonctions sur I* est une liste ordonnée

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

où, pour tout n , $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (or \mathbb{C}) est une fonction définie sur I à valeurs réelles (ou complexes). On note cette suite par $(f_n)_{n \geq 0}$. Plus généralement, on peut considérer des suites de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$, où n_0 est un entier fixé.

Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions sur I , alors pour tout $a \in I$ on obtient la suite numérique

$$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a), \dots$$

obtenue en évaluant chaque fonction de la suite en a .

EXEMPLE 1. (a) On considère la suite $(x^n)_{n \geq 0}$ comme suite de fonctions sur $I = \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, en évaluant cette suite en $x = a$ on obtient la suite numérique $(a^n)_{n \geq 0}$, qui est la suite géométrique de raison a .

(b) La suite $(e^{ixn})_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs complexes. Si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, en évaluant cette suite en $x = a$, on obtient la suite numérique à valeurs complexes $(e^{ia n})_{n \geq 0}$ (qui est également une suite géométrique, de raison e^{ia}). Par exemple : si $x = 0$, alors $e^{i0n} = 1$ pour tout n , d'où en évaluant la suite $(e^{ixn})_{n \geq 0}$ en $x = 0$ on obtient la suite constante $1, 1, \dots$; si $x = \pi$, alors $e^{i\pi n} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout n , d'où en évaluant la suite $(e^{ixn})_{n \geq 0}$ en $x = \pi$ on obtient la suite alternée $1, -1, 1, -1, \dots$.

REMARQUE 1. Si $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ définies sur I à valeurs complexes, on obtient deux suites $(\operatorname{Re} f_n)_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im} f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions sur I à valeurs réelles, où pour tout indice n les fonctions $\operatorname{Re} f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies en $x \in I$ en prenant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $f_n(x)$, c'est-à-dire :

$$(\operatorname{Re} f_n)(x) = \operatorname{Re}(f_n(x)) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Im} f_n)(x) = \operatorname{Im}(f_n(x)).$$

EXEMPLE 2. Si $f_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ alors $(\operatorname{Re} f_n)(x) = \cos(nx)$ et $(\operatorname{Im} f_n)(x) = \sin(nx)$.

REMARQUE 2. Comme pour les suites numériques, on peut considérer des suites de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ où n_0 est un entier fixé.

DÉFINITION 2. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$.

On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge en* $x_0 \in I$ lorsque la suite numérique $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$ est convergente.

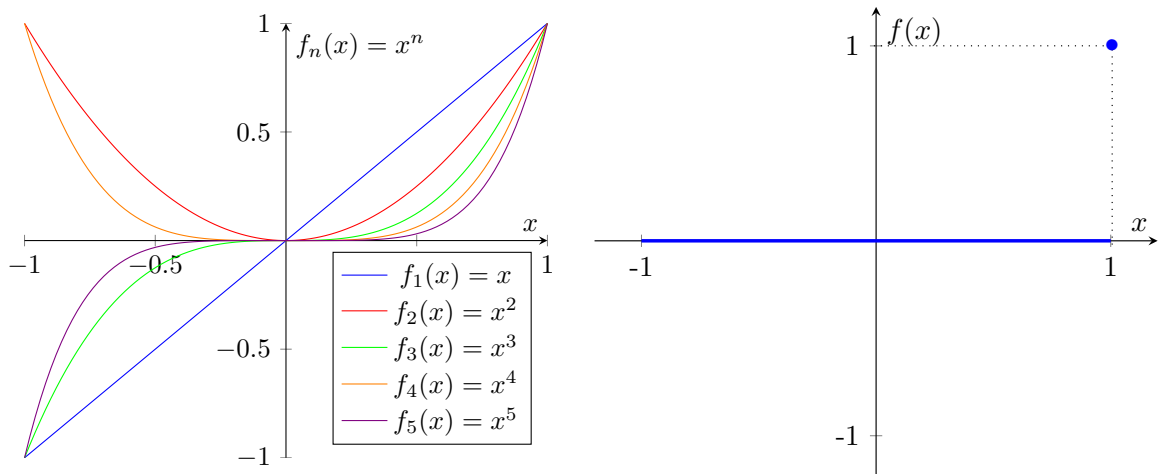
On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ *converge simplement sur I vers la fonction f* lorsque f est une fonction définie sur I et pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n \geq 0}$ (obtenue en évaluant chaque fonction f_n en x) converge vers le nombre $f(x)$ pour $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire : pour tout $x \in I$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

EXEMPLE 3. La suite $(x^n)_{n \geq 0}$ converge en $x \in I =]-1, 1[$ et ne converge pas en $x \notin I$. Plus précisément :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1, \\ +\infty & \text{si } x > 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Par conséquent, $(x^n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$



Par la suite on aura besoin de la notion de borne supérieure (ou supremum).

DÉFINITION 3. Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie qui possède un majorant (c'est-à-dire, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in E$). La *borne supérieure (ou supremum)* de E , notée $\sup E$, est le plus petit des majorants de E . Si E n'est pas majoré, on écrit $\sup E = +\infty$.

EXEMPLE 4. Si $E = [1, 2[$ ou $E = [1, 2]$, alors $\sup E = 2$. Si $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $E = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, alors $\sup E = 1$.

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur un même interval I de \mathbb{R} . Pour tout $x \in I$ fixé, $|f(x) - g(x)|$ est la distance entre les points des graphes de f et g au-dessus de x . On écrit usuellement $\sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ au lieu de $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$. C'est un nombre réel non-négatif qu'on abrège par $\|f - g\|_\infty$: donc

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}.$$

DÉFINITION 4. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

où

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

EXEMPLE 5. (a) La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions sur $I = [-\pi, \pi]$ définie par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle f donnée par $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. En effet, pour $n \geq 0$ fixé, on a

$$0 \leq \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{\sin(nx)}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

(b) La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $I = [0, 1[$ vers la fonction nulle $f(x) = 0$ pour tout x . La convergence n'est toutefois pas uniforme, car

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1.$$

Ainsi la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq 0}$, qui est la suite constante égale à 1, ne converge pas vers 0.

La notion de convergence forte est plus forte de celle de convergence simple.

PROPOSITION 1. *Si (f_n) converge uniformément sur I vers f , alors (f_n) converge simplement sur I vers f . La propriété réciproque n'est pas vraie (voir l'exemple précédent).*

Le lien entre la convergence d'une suite de fonction est celle de ses parties réelle et imaginaire est donné par la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *La suite (f_n) converge simplement sur I vers f si et seulement si les suites $(\operatorname{Re} f_n)$ et $(\operatorname{Im} f_n)$ convergent simplement sur I respectivement vers $\operatorname{Re} f$ et vers $\operatorname{Im} f$. La propriété analogue est vraie pour la convergence uniforme.*

2. Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un même intervalle I de \mathbb{R} à valeurs réelles ou complexes. Dans cette section on étudie les différentes notions de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.

DÉFINITION 5. La *suite des sommes partielles* de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de fonctions sur I , où, pour tout $n \geq 0$ fixé, S_n est la fonction sur I définie par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ pour tout $x \in I$. La fonction S_n est la *somme partielle n -ème* de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.

- On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en $x_0 \in I$ si la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge, c'est-à-dire si la suite numérique $(S_n(x_0))_{n \geq 0}$ des sommes partielles évaluées en x_0 est convergente. On note $S(x_0)$ la limite : $S(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0)$. On appelle le nombre $S(x_0)$ la *somme de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ en x_0* , écrit $S(x_0) = \sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ ou bien $S(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$.
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I si elle converge en tout $x \in I$. Ceci équivaut à dire que la suite (S_n) converge simplement sur I . On note $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ pour tout $x \in I$ fixé. On obtient ainsi une fonction $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) qui associe à tout $x \in I$ la somme $S(x)$ de la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$. La fonction S s'appelle la *somme sur I de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$* , ce qu'on l'écrit

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n \geq 0} f_n.$$

- On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur I si la série numérique $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in I$.
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I vers la somme $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) lorsque la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers S .
- On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I s'il existe une série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ telle que :
 - $a_n \geq 0$ pour tout n (c'est-à-dire $\sum_{n \geq 0} a_n$ est une série à termes positifs),
 - $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge,
 - Pour tout $n \geq 0$ fixé et pour tout $x \in I$ on a : $|f_n(x)| \leq a_n$.

REMARQUE 3. Comme dans le cas des séries numériques, on pourrait considérer des séries de fonctions de la forme $\sum_{n \geq n_0} f_n$, où n_0 est un entier fixé.

EXEMPLE 6. On considère la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$. On sait que

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1, \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ceci définit la suite (S_n) de ses sommes partielles. Pour tout x fixé on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } |x| < 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge simplement sur $I =]-1, 1[$ vers la fonction $S :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

La convergence de $\sum_{n \geq 0} x^n$ vers S n'est pas uniforme sur $] - 1, 1[$. En effet, soit $n \geq 0$ fixé. Alors

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|},$$

d'où

$$\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x \in]-1, 1[} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in]-1, 1[} \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} = \sup_{x \in [0, 1[} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty.$$

La suite numérique $(\|S_n - S\|_\infty)_{n \geq 0}$ ne peut être convergente vers 0.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge absolument sur $] - 1, 1[$, car pour tout $x \in] - 1, 1[$ fixé la série $\sum_{n \geq 0} |x^n|$ converge.

PROPOSITION 3 (Liens entre les notions de convergence). .

- Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est absolument convergente sur I , alors elle est aussi simplement convergente sur I .
- Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur I , alors elle est aussi simplement convergente sur I .
- Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est normalement convergente sur I , alors elle est aussi uniformément convergente sur I et absolument convergente sur I , donc simplement convergente sur I .

REMARQUE 4. Les convergences normale et absolue nous assurent la convergence simple d'une série de fonctions $\sum f_n$, mais ne donnent pas de méthode pour déterminer sa somme.

EXEMPLE 7. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$. En effet : pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [-a, a]$ on a $|x^n| = |x|^n \leq a^n$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$ est convergente. Par conséquent, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

PROPOSITION 4 (Parties réelles et imaginaires). Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ et soient $\sum \operatorname{Re} f_n$ et $\sum \operatorname{Im} f_n$ les séries de ses parties réelles et imaginaires. Alors : $\sum f_n$ converge simplement (respectivement, uniformément/absolument/normalement) sur I si et seulement si $\sum \operatorname{Re} f_n$ et $\sum \operatorname{Im} f_n$ le font. Dans ce cas, $\sum f_n = S$ si et seulement si $\sum \operatorname{Re} f_n = \operatorname{Re} S$ et $\sum \operatorname{Im} f_n = \operatorname{Im} S$.

PROPOSITION 5 (Propriétés des séries uniformément convergentes). Soit $\sum_{n \geq n_0} f_n$ une série de fonctions f_n sur I à valeurs réelles ou complexes.

(a) Supposons que pour tout n la fonction f_n est continue sur I . Si $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge uniformément sur I vers S , alors S est continue sur I .

(b) Supposons que :

- f_n est continue sur I pour tout n ,
- $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge simplement sur I vers S ,
- S est continue sur I ,
- $\sum_{n \geq n_0} \int_I |f_n(x)| dx$ converge.

Alors $\int_I (\sum_{n \geq n_0} f_n(x)) dx = \sum_{n \geq n_0} \int_I f_n(x) dx$.

(c) Supposons que :

- f_n est dérivable sur I et sa dérivée f'_n est continue sur I pour tout n ,
- $\sum_{n \geq n_0} f_n$ converge simplement sur I vers S ,
- $\sum_{n \geq n_0} f'_n$ converge uniformément sur I .

Alors S est dérivable sur I et

$$S'(x) = \left(\sum_{n \geq n_0} f_n(x) \right)' = \sum_{n \geq n_0} f'_n(x).$$

EXEMPLE 8. On veut calculer la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ pour $x \in I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On remarque que $nx^{n-1} = f'_n(x)$ pour $f_n(x) = x^n$. Plus précisément (since $(x^0)' = 1' = 0$), on a :

$$\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n \geq 1} (x^n)' = \sum_{n \geq 0} (x^n)'.$$

En outre, $f'_n(x) = nx^{n-1}$ est continue sur I et la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x) = x^n$ converge simplement sur I vers $\frac{1}{1-x}$. En plus, $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge uniformément sur I . En effet, cette série converge normalement, car pour tout $n \geq 1$ on a : $|nx^{n-1}| = n|x|^{n-1} \leq n(\frac{1}{2})^{n-1}$ et la série numérique $\sum_{n \geq 1} n(\frac{1}{2})^{n-1}$ est convergente (ceci peut être vérifié au moyen de la règle d'Alembert).

La partie (b) de la proposition 5 avec $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 0$ et $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ montre alors que

$$\sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (x^n)' = \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

3. Séries de Taylor

Les séries de Taylor forment une classe importante de séries de fonctions.

DÉFINITION 6. Soit $I =]a, b[$ un intervalle (borné ou pas) de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est *indéfiniment dérivable* sur I lorsque f possède dérivée n -ème $f^{(n)}$ sur I pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$. On écrit alors $f \in C^\infty(I)$.

On rappelle que $f^{(0)} = f$ et que pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est la dérivée de $f^{(n-1)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x), \\ f^{(1)}(x) &= (f^{(0)})'(x) = f'(x) = \frac{df}{dx}(x), \\ f^{(2)}(x) &= (f^{(1)})'(x) = (f')'(x) = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)})'(x) = \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)'(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x). \end{aligned}$$

DÉFINITION 7. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $I =]a, b[$. La *série de Taylor* de f en $x = x_0 \in I$ est la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

On dit qu'une fonction f est *développable en série de Taylor* en $x = x_0$ s'il existe un intervalle $I =]a, b[\subset I$ contenant x_0 tel que :

- $f \in C^\infty(I)$,
- la série de Taylor de f en x_0 converge simplement vers f sur I , c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

EXEMPLE 9. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est indéfiniment dérivable sur $I = \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \cos(x), & f^{(1)}(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x), \\ f^{(2)}(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x), & f^{(3)}(x) &= (-\cos(x))' = \sin(x) \end{aligned}$$

et, en général, pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \cos(x), & f^{(4k+1)}(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x), \\ f^{(4k+2)}(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x), & f^{(4k+3)}(x) &= (-\cos(x))' = \sin(x). \end{aligned}$$

Si par exemple $x_0 = 0$, alors

$$f^{(4k)}(0) = 1, \quad f^{(4k+1)}(0) = 0, \quad f^{(4k+2)}(0) = -1, \quad f^{(4k+3)}(0) = 0.$$

Puisque $4k = 2(2k)$ et $4k + 2 = 2(2k + 1)$ sont pairs tandis que $4k + 1$ et $4k + 3$ sont impairs, on a donc pour tout $n \geq 0$:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

La série de Taylor de $f(x) = \cos(x)$ en $x = 0$ est donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} \quad [\text{car } f^{(2n+1)}(0) = 0] \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

La proposition suivante donne un critère simple pour vérifier si une fonction est développable en série de Taylor en x_0 .

PROPOSITION 6. *Supposons que la fonction f soit indéfiniment dérivable dans l'intervalle I contenant x_0 . S'il existe des constantes $M \geq 0$ et $a > 0$ telles que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in I$ on a : $|f^{(n)}(x)| \leq Ma^n$, alors f est développable en série de Taylor en x_0 .*

EXEMPLE 10. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et ses dérivées $f^{(n)}(x)$ sont de la forme $\pm \cos(x)$ ou bien $\pm \sin(x)$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f^{(n)}(x)| \leq 1$. Par conséquent, la fonction $f(x) = \cos(x)$ est développable en série de Taylor en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En particulier, elle est développable en série de Taylor en $x_0 = 0$ et l'exemple ci-dessus donne donc : $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

