

Feuille de TD n^0 1 : Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 1 On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ des opérations d'addition $+$ usuelle et de la multiplication par nombres réels $\bullet$ définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ and $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ comme suit :

$$\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)\,.$$

Est-ce que $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Indiquer lesquels parmi les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés et lesquels ne le sont pas.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$
(b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + z = 0\}$
(c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2\}$
(d) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$
(e) $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y = 0\}$

Exercice 3 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

(a) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}$
(b) $\{f \in \mathcal{F} : f(0) = 1\}$
(c) l'ensemble des fonctions paires (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$),
(d) l'ensemble des fonctions monotones.

Exercice 4 Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dire lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

(a) $\left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + b = 0\right\}$
(b) $\left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1\right\}$.

Exercice 5 Soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et F le sous-ensemble de E formé des fonctions polynomiales P qui satisfont les propriétés suivantes :

- P est de degré ≤ 3,
- $P(1) = P(0)$,
- $P(-1) = 0$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer la forme d'un élément de F.
(b) Déterminer l'intersection $F \cap G$ si G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P(X) = X$.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les trois sous-espaces :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\},$$
$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}\right\},$$
$$G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\,;\, \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et que $E \cap G$ est une droite vectorielle que l'on déterminera.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.