Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2017-2018
Algèbre Linéaire 1 (L1)

Feuille de TD n^0 2 : Familles libres et génératrices, bases, dimension

Exercice 1 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(a) Les vecteurs $u = (1, 5, 7)$ et $v = (1, 3, 4)$ sont-ils linéairement indépendants ? Même question pour u, v et w où $w = (1, 2, 3)$.

(b) Considérons $u_1 = (1, -3, 4)$, $u_2 = (2, -1, -1)$ et $u_3 = (-4, 2, 2)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Écrire, si cela est possible :
– u_3 comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ;
– u_1 comme combinaison linéaire de u_2 et u_3 ;
– u_2 comme combinaison linéaire de u_1 et u_3.

(c) Étant donné $x = (1, 2, 1)$ déterminer y tel que (x, y) soit une famille libre. Déterminer alors z tel que (x, y, z) soit une famille libre.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^4$, les familles de vecteurs suivants sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.
$\big((2, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (0, 3, -1, -1), (1, 1, 5, 4)\big)$;
$\big((1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5)\big)$;
$\big((1, 2, -1, 0), (1, 0, 2, -1), (0, 2, -2, 1), (4, 1, -2, 3)\big)$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Les familles de vecteurs suivants de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.
(a) $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ -e_1 + e_2 + e_3)$;
(b) $(e_1 - e_3\ ,\ -e_1 + e_2\ ,\ -e_2 + e_3)$;
(c) $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ 2e_1 - e_2 + 2e_3\ ,\ e_1 - 2e_2 - e_3)$.

Exercice 4 Déterminer les valeurs du paramètre réel k pour lesquelles les vecteurs $v_1 = (0, 0, k, 1)$, $v_2 = (2, 2k, -2, 0)$ et $v_3 = (k, 1, k - 1, 1)$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes à coefficients réels et de degré ≤ 2 les sous-espaces vectoriels

$$U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p(4) = 0\} \qquad \text{et} \qquad V = \mathrm{Vect}(p_1, p_2, p_3)$$

où $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = x + 1$ et $p_3(x) = 2x^2 - 3x - 3$. Déterminer les dimensions et une base de U et V.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}_n[X]$ (pour $n \geq 3$) on considère les polynômes $P_1(X) = X(X - 1)(X - 2)$, $P_2(X) = X(X - 2)(X - 3)$, $P_3(X) = X(X - 1)(X - 3)$, $P_4(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

Forment-ils une famille libre ?

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1-i)e_1 + ie_2 + (1+i)e_3, \qquad u_2 = -e_1 + e_2 + 3e_3, \qquad u_3 = (1-i)e_1 + ie_2 + ie_3.$$

(a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.

(b) Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 8 Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel $E = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3\,; 2z_1 + z_2 - 3z_3 = 0\}$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - t &= 0 \\ x - y + z + 2t &= 0 \end{cases}.$$

(a) Trouver une base de F et déterminer la dimension de F.

(b) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (0,3,1,1)$, $v = (1,-1,1,1)$ et $w = (2,0,1,-1)$. Déterminer une base et la dimension de G.

(c) Déterminer un système d'équations de G.

(d) Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

Exercice 10 On considère l'espace vectoriel réel $E = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(X) = 0\}$ où $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ dénote la trace.

(a) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de E.

(b) Déterminer les composantes de $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ par rapport à cette base.

Exercice 11 Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par les systèmes d'équations suivants :

$$E\ :\ \begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{cases} \quad , \quad F\ :\ \begin{cases} x - 2y - t &= 0 \\ x - t &= 0 \end{cases}.$$

Déterminer des bases de E, F, $E \cap F$ et $E + F$. En déduire la dimension de ces espaces vectoriels.

Exercice 12 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Montrer que les fonctions $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = 1$ (la fonction constante) sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$.

(b) Soient n un nombre entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts. Pour $j = 1, \ldots, n$ on note $f_j(x) = e^{a_j x}$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}$.

(c) Est-ce que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 13 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient $a, b \in \mathbb{K}$ fixés. On supposera $b \neq 0$. Le but de cet exercice est celui d'étudier l'ensemble $S_{a,b}(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui sont définies par la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \,. \tag{1}$$

(a) Montrer que $S_{a,b}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(b) Remarquer qu'un élément $(u_n)_{n\geq 0}$ de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ est entièrement déterminé par ses deux premiers termes u_0 et u_1. Déterminer une base de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ et en déduire la dimension de $S_{a,b}(\mathbb{K})$.

(c) Soit $q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Montrer que la suite géométrique $(q^n)_{n\geq 0}$ appartient à $S_{a,b}(\mathbb{K})$ si et seulement si

$$q^2 - aq - b = 0 \qquad \text{(équation caractéristique)}$$

(d) Déduire de (b) l'expression générale d'une suite de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ lorsque l'équation caracteristique possède deux racines distinctes q_1 et q_2 dans $\mathbb{K}$.

(e) On suppose que l'équation caractéristique a une racine double q_0. Montrer que la suite (nq_0^n) appartient à $S_{a,b}(\mathbb{K})$. En déduire l'expression générale d'une suite de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ dans ce cas.

(f) On suppose maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que l'équation caractéristique possède dans $\mathbb{C}$ deux racines complexes conjuguées distinctes $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Montrer que les suites réelles $(r^n \cos(n\theta))$ et $(r^n \cos(n\theta))$ appartienent à $S_{a,b}(\mathbb{K})$. En déduire l'expression générale d'une suite de $S_{a,b}(\mathbb{K})$ dans ce cas.

(g) Déterminer les suites réelles satisfaisant (1) dans les cas suivants :

- $a = b = 1$ et $u_0 = 1, u_1 = 1$;
- $a = 1, b = -\frac{1}{4}$ et $u_0 = 2, u_1 = -1$;
- $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ et $u_0 = 1, u_1 = 1$.