Université de Lorraine – Metz
Séries et transformations (L2, SPI-EE-APR)

Année universitaire 2016-2017
14/12/2016

Contrôle n^0 1 (rattrapage) : Fonctions usuelles, nombres complexes
Durée : 1 heure

Exercice 1 (5 points) Tracer le graphe de la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2 (2+3 points) Déterminer si les fonctions suivantes, définies pour tout nombre réel $x \neq 0$, sont paires, impaires, ou bien ni paires ni impaires :

(a) $$g(x) = \frac{|\sin(x)|}{\cos(x)}$$

(b) $$h(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Exercice 3 (2+3 points) (a) Résoudre l'équation

$$\frac{1}{2} = 1 - 2^{-x}$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit

$$\varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \psi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Vérifier l'égalité

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (2+3 points) .

(a) Écrire la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = \frac{(1+i)(2+i)}{3+i}$.

(b) Déterminer les nombres complexes $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) satisfaisant l'égalité

$$|z-1| = |z|$$

.