Université de Lorraine – Metz
Séries et transformations
16/12/2015

Année universitaire 2015-2016
L2 SPI EE APR

Contrôle n^0 3 : Suites et séries de fonctions, séries de Fourier
Durée : 2 heures

Questions de cours (4 points). *[Barême : (1) 1, (2) 1, (3) 2]*

(1) Esquissez le graphe d'une fonction f qui est continue par morceaux sur $[0,1]$ mais pas continue sur $[0,1]$.
(2) Esquissez le graphe d'une fonction g qui est continue et C^1 par morceaux sur $[0,1]$, mais pas dérivable sur $]0,1[$.
(3) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx$$

en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 1 (3 points) .
Déterminer la limite simple sur $I = [0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ lorsque

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \qquad \text{pour } x \in [0,1].$$

Exercice 2 (4 points) .
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^n}$.
(a) Montrer que cette série converge simplement sur $]1,+\infty[$ vers une fonction S à déterminer.
(b) Montrer que cette série converge normalement sur $[2,+\infty[$

Exercice 3 (10 points) .
On considère la fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi,\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0,\pi[\end{cases}.$$

(a) Tracer le graphe de f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
(b) Est-ce que f est une fonction paire ou bien impaire ?
(c) Montrer que f est C^1 par morceaux.
(d) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
(e) En déduire les coefficients de Fourier complexes de f.
(f) Ecrire la série de Fourier de f en forme réelle.
(g) Calculer la somme de la série de Fourier de f en tout $x \in [-\pi,\pi]$. Justifier votre réponse.
(h) Déduire de (g) que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
