Université de Lorraine – Metz | Année universitaire 2016-2017
Séries et transformations | L2 SPI EE APR
14/12/2016

Contrôle n^0 3 : Séries, suites et séries de fonctions, séries de Fourier
Durée : 2 heures

Questions de cours (2 points). *[Barème : (1) 1, (2) 1]*

(1) Soit $\sum a_n$ une série numérique telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Est-ce qu'on peut conclure que $\sum a_n$ converge ? Justifiez votre réponse avec une explication ou un exemple.

(2) Donnez la définition de convergence normale pour une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$, où toutes les f_n sont définies sur un même interval I de $\mathbb{R}$.

Exercice 1 (6 points) .
Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$(a)\ \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n \qquad (b)\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n}{2^n} \qquad (c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{n}{\ln n}$$

Exercice 2 (3 points) .
Déterminer la limite simple sur $I = [1, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ lorsque

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)n + e^x}{2 + nx} \qquad \text{pour } x \in [1, +\infty[.$$

Exercice 3 (3 points) .
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{1+nx}$ pour $x \in I = [0, \frac{1}{2}]$.

(a) Montrer que cette série converge normalement sur I vers une fonction S. (On ne demande pas de déterminer la somme S de cette série.)

(b) Est-ce cette série converge uniformément sur I vers S ?

Exercice 4 (8 points) .
On considère la fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases}.$$

(a) Tracer le graphe de f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(b) Est-ce que f est une fonction paire ou bien impaire ?

(c) Montrer que f est C^1 par morceaux.

(d) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

(e) Ecrire la série de Fourier de f en forme réelle.
