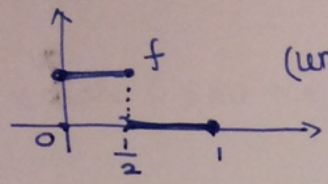
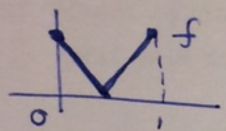
QUESTIONS COURS — CONTROLE n° 3 : 2015-2016

(1) Graphe d'une fonction f continue par morceaux mais pas continue sur $[0,1]$



(un exemple)

(2) Graphe d'une fonction f continue et C^1 par morceaux sur $[0,1]$ mais pas dérivable sur $]0,1[$



(un exemple)

(3)
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi & (\text{si } n=0) \\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx + i\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx}_{=0 \text{ car } \sin(nx) \text{ impaire}} & \\ = 2\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx & \\ = 2\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0 & (\text{si } n\neq 0) \end{cases}$$

EX 1 $I=[0,1]$; limite simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 & \text{si } x=0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{nx} = 1 & \text{si } x\neq 0 \\ & (\text{car } 1+nx \sim nx \text{ pour } x\neq 0 \text{ fixé}) \end{cases}$$

EX 2 $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^n} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ série géométrique de raison $\frac{1}{x}$

(1) convergence simple sur $]1,+\infty[$ vers une fonction S à déterminer

La série géométrique $\sum_{n\geq 0} y^n$ converge simplement vers $\tilde{S}(y) = \frac{1}{1-y}$ lorsque $|y|<1$. Si $x\in]1,+\infty[$, alors $\frac{1}{x}\in]0,1[$, d'où $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ converge simplement vers $S(x) = \tilde{S}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

(2) Convergence normale sur $[2,+\infty[$

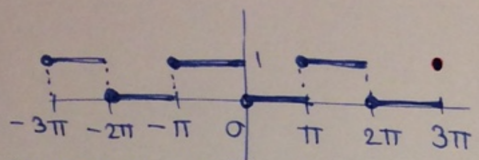
Pour tout $x\in[2,+\infty[$ on a $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}$, d'où $0<\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et la série géométrique $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$. La convergence de $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{x}\right)^n$ vers $S(x) = \frac{x}{x-1}$ est donc normale sur $[2,+\infty[$.

EX 3

f 2π-périodique, $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in[-\pi,0[\\ 0 & \text{si } x\in[0,\pi[\end{cases}$

(a)

graphe f pour $x\in[-3\pi,3\pi]$



(b) pas paire, pas impaire

(c) C^1 par morceaux

continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$ $\to$ partout

(1) continue sur $]-\pi,0[$ et $]0,\pi[$

(2) $\exists$ finies $f(-\pi+)=1$, $f(\pi-)=0$

$f(0-)=1$, $f(0+)=0$

dérivable avec $\underbrace{\text{dérivée}}_{f'(x)=0}$ continue sur $]-\pi,0[$ et $]0,\pi[$

$\exists\, f'(-\pi+)=0$ $\quad f(0\pm)=0$

$f'(\pi-)=0$

(d) Coeffs de Fourier

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}dx=1$$

$$(n>0)\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\underbrace{\cos(nx)}_{(\frac{1}{n}\sin(nx))'}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}[\sin(nx)]_{-\pi}^{0}=0$$

$$b_0=0$$

$$(n>0)\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\underbrace{\sin(nx)}_{(-\frac{1}{n}\cos(nx))'}dx$$

$$=\frac{-1}{\pi}\frac{1}{n}[\cos(nx)]_{-\pi}^{0}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\Big(\underbrace{\cos(0)}_{=1}-\underbrace{\cos(-\pi n)}_{(-1)^n}\Big)$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n \text{ pair}\\ \frac{-2}{\pi n} & n\text{ impair}\end{cases}$$

(e) $n>0$: $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}=-\dfrac{ib_n}{2}=\begin{cases}0 & n\text{ pair}\\ \frac{+i}{\pi n} & n\text{ impair}\end{cases}$

$n=0$ $\quad c_0=\dfrac{a_0}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

$n<0$: $c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}=\dfrac{ib_n}{2}=\begin{cases}0 & n\text{ pair}\\ \frac{-i}{\pi n} & n\text{ impair}\end{cases}$

(f)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}b_n\sin(nx)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n\geq1\\ n\text{ impair}}}\left(\frac{-2}{\pi n}\right)\sin(nx)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)x)$$

$\begin{pmatrix} n=2k+1 \\ n\geq1\ \&\ k\geq0\end{pmatrix}$

(g) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\sin((2k+1)x)=\begin{cases}1 & x\in]-\pi,0[\\ 0 & x\in]0,\pi[\\ 1/2 & x\in\{-\pi,0,\pi\}\end{cases}$ d'après le thm de Dirichlet (f C^1 par morceaux)

(e) $x=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \sin\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}=\dfrac{\pi}{4}$