Université de Lorraine – Metz Année universitaire 2017-2018
Séries et transformations (L2, SPI EE)

Feuille de TD n^0 4 : Séries numériques

Exercice 1 Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

(a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

(b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n}$.

En déduire la nature des séries et, si possible, leur somme.

Exercice 2 Déterminer si possible la somme des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}$ où x est un nombre réel fixé.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{3^n}$ où x est un nombre réel fixé.

[*Indication :* utiliser (d).]

Exercice 3 On pose $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

(a) Déterminer si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

(b) Déterminer si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Exercice 4 Déterminer par comparaison ou par équivalence la nature de la série positive $\sum_{n\geq 1} u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \dfrac{1}{2^n + n}$, (b) $u_n = \dfrac{n^2+5n+1}{\sqrt{1+n^5}}$, (c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 5 Étudier la nature des séries numériques suivantes :

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{2n+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n}{\sqrt{1+n^2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{3n+2}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n!$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!}$.

Exercice 6 Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{5+n} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} .$$