Feuille de TD n^0 5 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est donnée par

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour tout $x \in [0,1]$,
2. $f_n(x) = \dfrac{1+nx^2}{1+nx}$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ pour tout $x \in [0,1/2]$

(a) Déterminer la limite de la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ lorsque $x = 2$ ou $x = 0$.

(b) Déterminer la limite simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2 Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ dans les cas suivants.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $I = [0,1/2]$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^2}$ sur $I = [0,1]$.

Exercice 3 Montrer que la série de functions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+2x}$ converge simplement mais pas absolument sur $[0,1]$.

Exercice 4 Écrire la série de Taylor en $x_0 = 1$ de la fonction $f(x) = \ln(x)$.

Exercice 5 . On considère la function $f(x) = e^x$ et $x_0 = 0$.

(a) Déterminer la série de Taylor de f en x_0.

(b) Montrer que $f(x)$ est développable en série de Taylor dans un intervalle I qui contient x_0. En déduire la valeur de la somme de la série de Taylor dans un intervalle qui contient x_0.