

**Feuille de TD n<sup>0</sup> 6 : Séries de Fourier**

**Exercice 1** On considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  sur  $\mathbb{R}$  définie sur  $[0, 2\pi[$  comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } -\pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de  $f$ .
- (b) Est-ce que la fonction  $f$  est paire, ou impaire, ou ni paire ni impaire ?
- (c) Montrer que  $f$  est  $C^1$  par morceaux.
- (d) Calculer les coefficients de Fourier réels et complexes de  $f$ . Écrire les séries de Fourier correspondantes.
- (e) Calculer la somme de la série de Fourier de  $f$

**Exercice 2** On considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $g$  sur  $\mathbb{R}$  définie sur  $[-\pi, \pi[$  comme suit :

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$$

- (a) Tracer le graphe de  $g$ .
- (b) Est-ce que la fonction  $g$  est paire, ou impaire, ou ni paire ni impaire ?
- (c) Montrer que  $g$  est continue et  $C^1$  par morceaux.
- (d) Calculer les coefficients de Fourier réels de  $g$ . Écrire la série de Fourier correspondante.
- (e) Calculer la somme de la série de Fourier de  $g$ . Déterminer la nature de la convergence (normale/uniforme/absolue/simple).
- (f) Dédurre de ce qui précède les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$