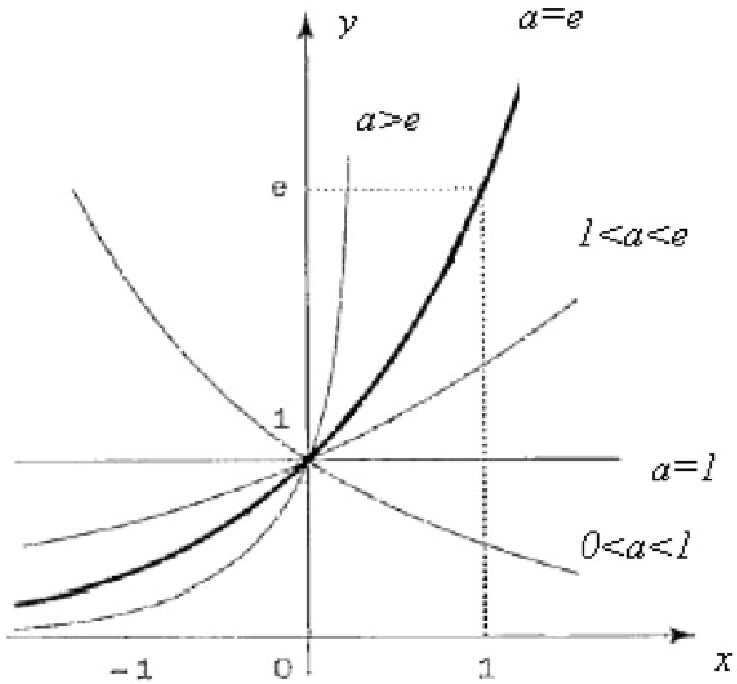
Fonctions exponentielles : $f(x) = \alpha^x$

Variable : $x \in \mathbb{R}$ *Paramètre :* $\alpha > 0$



Relations de définition

Cas important : e^x

$e = 2,71828182...$

$\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$

Relations fonctionnelles

$\alpha^x \beta^x = (\alpha\beta)^x$

$\alpha^x \alpha^t = \alpha^{x+t}$

$(\alpha^x)^t = \alpha^{xt}$

Monotonie

Fonction croissante si $\alpha > 1$

Fonction constante si $\alpha = 1$

Fonction décroissante si $0 < \alpha < 1$

Limites

$\alpha^0 = 1$ quel que soit α

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1\,, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1\,, \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1\,, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1\,, \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

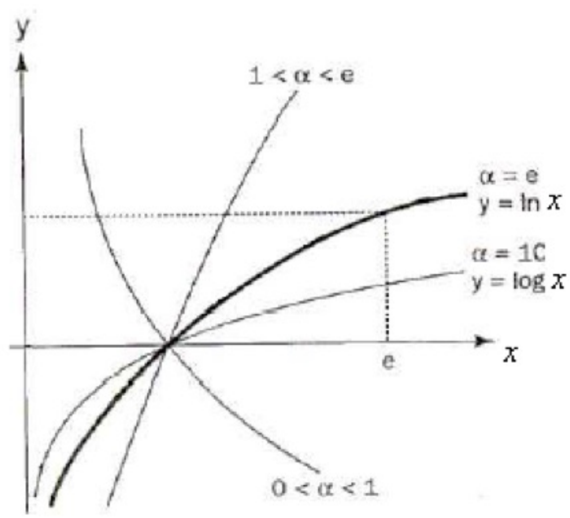
Dérivées

$\big(e^x\big)' = e^x$

$\big(\alpha^x\big)' = \alpha^x \ln \alpha$

Fonctions logarithmes : $f(x) = \log_\alpha x$

Variable : $x > 0$ *Paramètre :* $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$



Relations de dèfinition

$y = \log_\alpha x \iff x = \alpha^y$

Cas particuliers :

$\ln x := \log_e x$ (logarithme népérien)

$\log x := \log_{10} x$ (logarithme de base 10)

Relations entre bases différentes

$$\log_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$$

$$\log_\beta x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$$

Relations fonctionnelles

$\log_\alpha(xt) = \log_\alpha x + \log_\alpha t$

$\log_\alpha(x^\beta) = \beta \log_\alpha x$

Monotonie

Fonction croissante si $\alpha > 1$

Fonction décroissante si $0 < \alpha < 1$

Limites

$\log_\alpha \alpha = 1$ quel que soit α

$\log_\alpha 1 = 0$ quel que soit α

$$\lim_{x \to +\infty} \log_\alpha x = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1\,, \\ -\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \log_\alpha x = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 1\,, \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1\,. \end{cases}$$

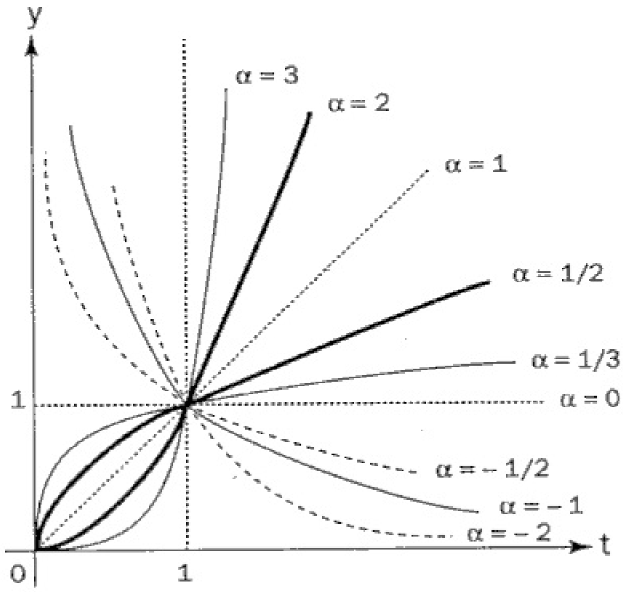
Dérivées

$\big(\ln x\big)' = \dfrac{1}{x}$

$\big(\log_\alpha x\big)' = \dfrac{1}{x \ln \alpha}$

Fonctions puissances : $f(x) = x^\alpha$

Variable : $x > 0$ *Paramètre :* $\alpha \in \mathbb{R}$



Relations de définition

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Soient $y > 0, x > 0$. Alors :

$y = x^\alpha \iff x = y^{1/\alpha}$

Relations fonctionnelles

$x^\alpha t^\alpha = (xt)^\alpha$

$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Monotonie

Fonction croissante si $\alpha > 0$

Fonction constante si $\alpha = 0$

Fonction décroissante si $\alpha < 0$

Limites

$1^\alpha = 1$ quel que soit α

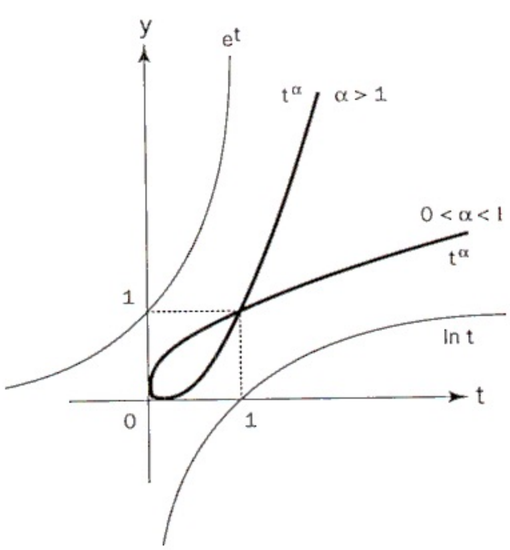
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0\,, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0\,, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0\,. \end{cases}$$

Dérivées

$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Croissance comparée : On suppose que $\alpha > 0$.



Lorsque x croît indéfiniment

- e^x tend vers l'infinie plus vite que x^α :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty\,.$$

- x^α tend vers l'infinie plus vite que $\ln x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty\,.$$