Chapitre 1

Rappels sur les fonctions

DÉFINITION 1. Une *fonction* $f : A \to B$ est définie par la donnée d'un ensemble de départ A, d'un ensemble d'arrivée B et d'une correspondance f mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec un unique élément de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de départ est appelé le *domaine de définition* de la fonction ; l'ensemble d'arrivée est appelé le *domaine de variation* de la fonction.

REMARQUE 1. On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Un *nombre réel* est obtenu en formant un développement décimal quelconque. $\mathbb{R}$ se figure idéalement comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

Une fonction est usuellement notée par un nom. Il y a des fonctions spéciales (comme p.ex. les fonctions sin, cos, log, etc.) ou bien des fonctions génériques avec un nom générique (par ex. f, g, h, F, etc.). Les valeurs dans le domaine de définition sont indiquées par une variable, par ex x ou t ; les valeurs correspondantes sont notées par $f(x)$ ou $f(t)$.

EXEMPLE 1.

$$\begin{aligned} f :& [-1,1] \to \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^2 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = x^2 \quad (x \in [-1,1])$$

sont les notations employées pour représenter la fonction (appelée f) avec domaine de définition $[-1,1]$, domaine de variation $\mathbb{R}$ et qui associe à chaque élément de $[-1,1]$ son carré.

REMARQUE 2. A chaque élément x du domaine de définition d'une fonction f est toujours associé une valeur unique, c'est-à-dire $f(x)$. On peut toutefois avoir des éléments du domaine de variation de f qui ne sont pas de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de définition de x. Le domaine de variation ne doit être confondu avec l'*image* de la fonction f, qui est la partie des éléments du domaine de variation de f qui sont de la forme $f(x)$ pour quelque x dans le domaine de variation de f. Dans l'exemple 2, le nombre -1 est un nombre réel, donc dans le domaine de variation de la fonction $f(x) = x^2$ $(x \in [-1,1])$, mais -1 n'est pas un carré d'un nombre réel ; l'image de f, qui est formée par les éléments qui sont de la forme x^2 avec $x \in [-1,1]$, est l'intervalle $[0,1]$.

REMARQUE 3. Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction $f(x)$, s'il n'est pas donné, on regarde les valeurs x, où l'expression $f(x)$ ne peut pas être définie. Par exemple :

(1) La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour tout $x \neq 0$ (car on ne peut pas diviser par 0). Son domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) La fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ (en tant que fonction à valeurs réels) est définie pour tout x tel que $x - 1 \geq 0$ (car $x - 1$ doit etre nonnegatif pour avoir une racine carrée réelle). Son domaine de définition est donc $[1, +\infty[$.

DÉFINITION 2. Le *graphe* (ou *courbe représentative*) d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f. On dit aussi que l'équation du graphe de f est $y = f(x)$.

1. Propriétés élémentaires

Par la suite, I note une partie de $\mathbb{R}$, comme par exemple un intervalle (borné ou pas) ou une union d'intervalles.

Remarque 4. On utilisera la notation suivante pour les intervalles :

(1) $]a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x < b$;
(2) $[a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x \leq b$;
(3) $[a, b[$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x < b$;
(4) $]a, b]$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $a < x \leq b$;

Les nombres a et b sont les *bornes* (ou les *extremités*) des intervalles ci-dessus. L'intervalle $]a, b[$, formé de tous les nombres réels strictement compris entre a et b, est dit l'intervalle *ouvert* de bornes a et b, tandis que $[a, b]$, qui inclut aussi a et b, est dit l'intervalle *fermé* de bornes a et b.

Si b est un nombre réel, alors $]-\infty, b[$ est l'ensemble des réels strictement inférieurs à b et $]-\infty, b]$ est l'ensemble des réels inférieurs ou égales à b. De même, si a est un nombre réel, alors $]a, +\infty[$ (respectivement, $[a, +\infty[$) dénote l'ensemble des réels strictement supérieurs à a (respectivement supérieurs ou égales à a). Enfin $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $-x \in I$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit que f est *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemple 2. (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) Soit $\mathbb{R} \setminus \{0\} :=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire.

Remarque 5. La fonction f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f ; la fonction f est impaire si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie du graphe de f.

Définition 4. Soit $T > 0$. On dit que T est une *période* de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ lorsque $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in I$ tel que $x + T \in I$. Dans ce cas on dit que f est *périodique*.

Exemple 3. (a) $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition $\mathbb{R}$; $\sin(x)$ est impaire et $\cos(x)$ est paire.
(b) Le domaine de définition de $f(x) = \tan(x)$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ [ici $\mathbb{Z}$ note l'ensemble des nombres entiers]. La fonction $\tan(x)$ est périodique de période π.

Définition 5. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :

- *croissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strictement croissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$;
- *décroissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strictement décroissante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$;
- *constante sur* I, si pour tout $x_1, x_2 \in I$ on a $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemple 4. La fonction $f(x) = x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; la fonction h définie par $h(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante.

Remarque 6. Si I est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors la croissance/décroissance de f sur I peut être étudiée au moyen du signe de la dérivée f' de f : si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I, tandis que si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I. Par conséquent, si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

2. Exemples

2.1. Fonctions affines. Une *fonction affine* est définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

où a et b sont des constantes. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Si $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont deux points quelconques de la droite, alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

est appelé la *pente* de la droite ; $b = f(0)$ est le point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées. Si $b = 0$, alors le graphe passe pour l'origine du repère et f est appelé une *fonction linéaire*. La fonction f est strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.

2.2. Trinôme du second degré. Une fonction définie par un *trinôme du second degré* est de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son graphe est une parabole. Si $a > 0$, alors le sommet est un minimum ; si $a < 0$, il est un maximum. L'abscisse et l'ordonnée du sommet sont

$$x_s = -\frac{b}{2a}, \qquad y_s = f(x_s) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Les solutions de $f(x) = 0$ donnent, si elles existent, l'abscisse des points où graphe de f coupe l'axe de x. L'existence de ces solutions dépend de la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, on a les 2 solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, on a les 2 solutions réelles coïncidentes

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles.

Remarque 7. Si $\Delta \geq 0$, alors l'abscisse x_s du sommet est la moyenne de x_1 et x_2, c'est-à-dire $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (la droite d'équation $x = x_s$ est l'axe de symétrie de la parabole qui représente le graphe de f). Puisque x_s est pour la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ l'abscisse d'un minimum si $a > 0$ et d'un maximum si $a < 0$, il peut également être déterminé en résolvant l'équation $f'(x) = 0$, où f' dénote la dérivée de f. Donc $x_s = -\frac{b}{2a}$, car $f'(x) = 2ax + b$.

2.3. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques les plus importantes sont les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques de période 2π sur leur domaine de définition $\mathbb{R}$. Leur image est l'intervalle $[-1, 1]$. Le domaine de définition de la fonction $\tan x$ est $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et celui de la fonction $\cot x$ est $\mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Elles sont périodiques de période π et leur image est $\mathbb{R}$.

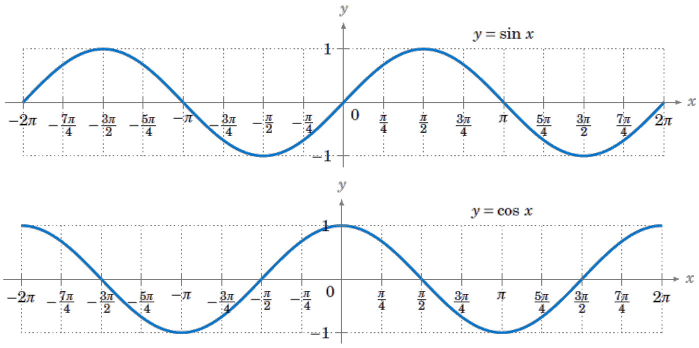

FIGURE 1. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$

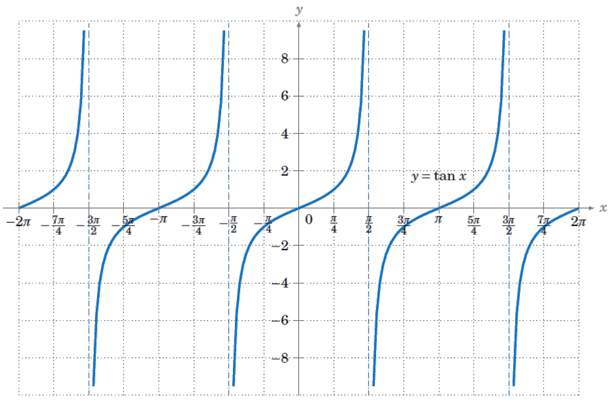

FIGURE 2. La fonction $\tan x$

2.4. Fonctions exponentielles et logarithmes. Soit $a > 0$ fixé. La *fonction exponentielle en base* a est définie par la relation

$$f(x) = a^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La forme du graphe de la fonction exponentielle dépend de a. Elle est croissante pour $a > 1$, décroissante pour $0 < a < 1$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $a = 1$. Voir figure 3.

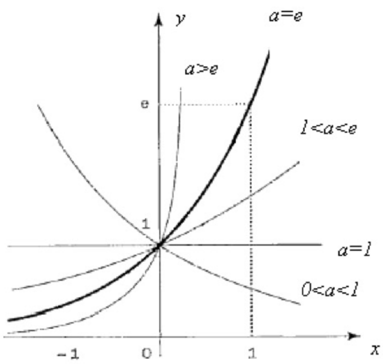

FIGURE 3. Graphe de la fonction $y = a^x$

Propriétés fondamentales :

- $a^x > 0$;
- $a^x a^t = a^{x+t}$;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (car $a^{-x}a^x = a^{x-x} = a^0 = 1$) ;
- $(a^x)^t = a^{xt}$.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La *fonction logarithme en base a* est la fonction

$$f(x) = \log_a x \qquad (x \in]0, +\infty[)$$

définie par la relation

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

On suppose, par exemple, que $a = 10$. Alors $\log_{10} 1000 = 3$ car $1000 = 10^3$.

Comme pour la fonction exponentielle, la forme du graphe de la fonction logarithme dépend de la valeur de a. Voir figure 4. Plus précisément, le graphe de $y = \log_a x$ est symétrique au graphe de $y = a^x$ par rapport à la droite $y = x$.

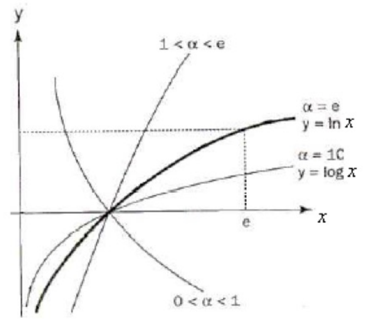

FIGURE 4. Graphe de la fonction $y = \log_\alpha x$

Propriétés fondamentales :

- $\log_a(xt) = \log_a x + \log_a t$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a(1/x) = -\log_a x$ (car $\log_a(1/x) + \log_a(x) = \log_a(1/x \cdot x) = \log_a 1 = 0$) ;
- $\log_a(x^r) = r \log_a x$ pour tout $r \in \mathbb{R}$.

Deux valeurs importantes de la base a sont les suivantes :

(a) $a =$ la *constante e d'Euler* (appelée aussi *nombre exponentiel* ou *nombre de Néper*). Elle vaut approximativement $2,718\ldots$. Une des propriétés fondamentales de la constante e est liée à la croissance de la fonction exponentielle e^x.

La fonction $\log_e x$ est notée $\ln x$ et s'appelle *logarithme népérien* (ou *naturel*).

(b) $a = 10$. Dans ce cas, la fonction $\log_{10} x$ est notée $\log x$.

Propriétés :

(a) Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

(b) Pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$
$$a^x = e^{(\ln a)x}\,.$$
En particulier : Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a
$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$
et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$10^x = e^{(\ln 10)x}.$$
Ici $\ln 10 \approx 2,3026...$.

2.5. Fonctions puissances. Si n est un nombre entier positif, on connaît la fonction puissance $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ fois}}$, qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée $\sqrt{x} = x^{1/2}$ est aussi une fonction puissance, mais elle est définie seulement pour $x \geq 0$. En général, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La *fonction puissance*
$$f(x) = x^\alpha$$
a domaine de définition égal à :
- $\mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$, si $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, q impair et $q \neq 0$. Dans ce cas $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.
- $]0, +\infty[$ dans toutes les autres cases. Dans ces cases $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$. Pour $\alpha \geq 0$ on peut étendre le domaine de définition de x^α à $[0, +\infty[$ en posant $0^\alpha := 0$.

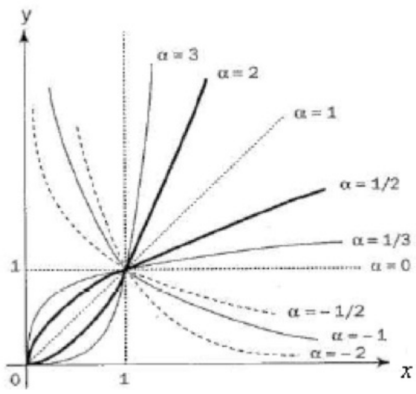

FIGURE 5. Graphe de la fonction $y = x^\alpha$

Propriétés fondamentales :
- $x^\alpha > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$;
- $x^\alpha t^\alpha = (xt)^\alpha$;
- $1^\alpha = 1$;
- $(1/x)^\alpha = \dfrac{1}{x^\alpha}$ (car $(1/x)^\alpha x^\alpha = 1^\alpha = 1$) ;
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

La forme du graphe de la fonction puissance $y = x^\alpha$ dépend du valeur de α. Elle est croissante si $\alpha > 0$, décroissante si $\alpha < 0$, et constante (avec $f(x) = 1$ pour tout x) si $\alpha = 0$. Voir figure 5.