Chapitre 3

Suites

DÉFINITION 1. Une *suite numérique* est une liste ordonnée de nombres réels ou complexes :

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots, a_n\,, \ldots .$$

On note cette suite par $(a_n)_{n\geq 1}$ ou $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ou, plus simplement (a_n), si cela ne cause pas d'ambiguïté. a_n s'appelle le *terme général* de la suite (a_n). L'entier n s'appelle l'indice de a_n.

REMARQUE 1. La valeur du premier indice n'est pas importante : on peut avoir suites dont le premier indice est 1, càd a_1, a_2, a_3, $\ldots$ (comme dans la définition 1), ou bien suites dont le premier indice est 0, càd a_0, a_1, a_2, $\ldots$, notée $(a_n)_{n\geq 0}$, ou bien suites dont le premier indice est n'importe quel nombre entier positif n_0 fixé, càd a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, $\ldots$, notée $(a_n)_{n\geq n_0}$.

EXEMPLE 1. (a) $a_n = 1/n$ est le terme général de la suite 1, 1/2, $1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

(b) $a_n = c + rn$ (où c et r sont fixés) est le terme général de la *suite arithmétique de raison* r.

(c) $a_n = cr^n$ (où c, et r sont fixés) est le terme général de la *suite géométrique de raison* r.

1. Suites de nombres réels

Dans cette section on considère des suites dont les termes sont des nombres réels.

On peut représenter une suite de nombres réels dans un graphe en marquant pour tout n le point d'abscisse n et d'ordonnée a_n. Par exemple, la suite de terme général $1/n$ peut être représentée comme dans la figure ci-dessous. Les éléments de la suite sont représentés par le points d'abscisses $n = 1, 2, 3, \ldots$ sur le graphe de la function $f(x) = 1/x$.

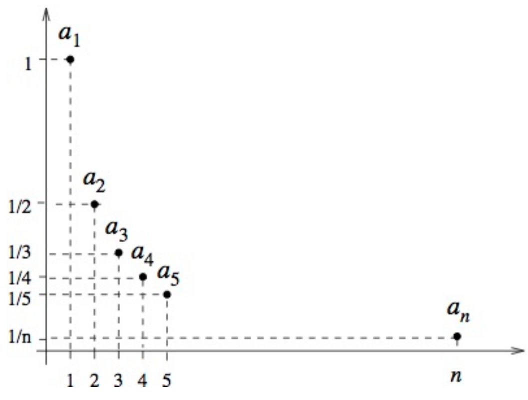

FIGURE 1. Représentation graphique de la suite $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$

On s'intéresse au comportement d'une suite (a_n) lorsque n devient arbitrairement grand .

DÉFINITION 2. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ admet une *limite* (finie) $a \in \mathbb{R}$, et on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, si quelque soit le nombre positif ε (choisi aussi petit que l'on veut), il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ qui satisfait la propriété suivante :

$$\text{si } n \geq n_\varepsilon \ , \text{ alors } |a_n - a| < \varepsilon \, .$$

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente* (ou *non convergente*).

REMARQUE 2. n_ε dépend de ε.

Illustration de la définition : La figure 1 montre le graphe d'une suite $\{a_n\}$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. La définition de convergence vers a signifie que tous les éléments

$$a_{n_\varepsilon},\ a_{n_\varepsilon+1},\ a_{n_\varepsilon+2},\ \ldots$$

sont dans la bande horizontale entre les droites $y = a - \varepsilon$ et $y = a - \varepsilon$.

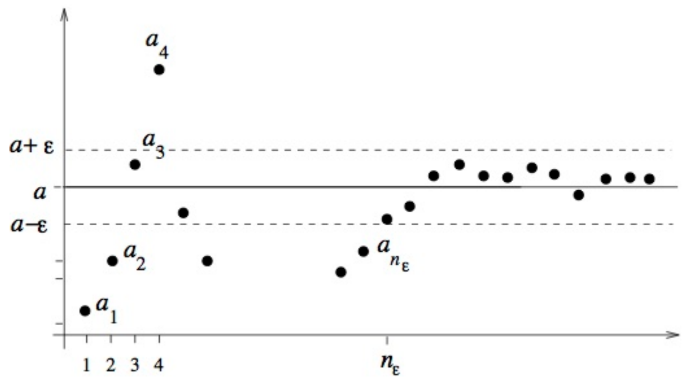

FIGURE 2. Suite convergent à a

EXEMPLE 2. (a) Si $a_n = a$ pour tout n, càd si (a_n) est la suite constante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *Preuve.* Soit $\varepsilon > 0$. On doit déterminer un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \, .$$

Comme $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$ pour $n \geq n_\varepsilon$, il suffit de choisir n_ε tel que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. □

(c) La suite (a_n) avec terme général $a_n = (-1)^n$ est non convergente. Tous les termes d'indice pair sont égaux à 1 et tous les termes d'indice impair sont égaux à -1. Si on choisit n'importe quel $a \geq 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice pair ne vérifient pas $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a - (-1) = a + 1 \geq 1$). Si on choisit n'importe quel $a < 0$ et $\varepsilon = 1/2$, alors tous les termes d'indice impair ne vérifient pas $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ (car $a - 1 < -1$, donc $|1 - a| > 1$).

Règles du calcul des limites (pour suites convergentes) :

(1) Si (a_n) et (b_n) sont deux suites convergentes et $c \in \mathbb{R}$, alors
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n \, ,$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n \, ,$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big)$,

(d) Si, en outre, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

(2) Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$. Soit $\{c_n\}$ une troisième suite. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq c_n \leq b_n\,,$$

alors $\{c_n\}$ est convergente et $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

(3) Soit (a_n) une suite convergente et $c \in \mathbb{R}$.

(a) Si $a_n > c$ pour tout n, alors $\lim_{n\to\infty} a_n \geq c$;

(b) Si $a_n < c$ pour tout n, alors $\lim_{n\to\infty} a_n \leq c$;

(c) Si $a_n \geq c$ pour tout n, alors $\lim_{n\to\infty} a_n \geq c$;

(d) Si $a_n \leq c$ pour tout n, alors $\lim_{n\to\infty} a_n \leq c$.

Exemple 3. (a) On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^3+n+1} = 0\,.$$

En effet, on remarque que

$$\frac{3n^2+1}{n^3+n+1} = \frac{n^2\big(3+\frac{1}{n^2}\big)}{n^3\big(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\big)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\big(3+\frac{1}{n^2}\big)}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\,,$$

d'où le résultat, car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\big(3+\frac{1}{n^2}\big)}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 3\,.$$

(b) Plus généralement, on a pour des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_h$ fixés tels que $\alpha_k \neq 0$ et $\beta_h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1}n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_h n^h + \beta_{h-1}n^{h-1} + \cdots + \beta_1 n + \beta_0} \\
&\quad= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k\big(\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{n^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{n^k}\big)}{n^h\big(\beta_h + \beta_{h-1}\frac{1}{n} + \cdots + \beta_1\frac{1}{n^{h-1}} + \beta_0\frac{1}{n^h}\big)} \\
&\quad= \lim_{n\to\infty} n^{k-h} \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{1}{n} + \cdots + \alpha_1\frac{1}{n^{k-1}} + \alpha_0\frac{1}{n^k}}{\beta_h + \beta_{h-1}\frac{1}{n} + \cdots + \beta_1\frac{1}{n^{h-1}} + \beta_0\frac{1}{n^h}} \\
&\quad= \frac{\alpha_k}{\beta_h} \lim_{n\to\infty} n^{k-h} \\
&\quad= \begin{cases} 0 & \text{si } k < h \\ \frac{\alpha_k}{\beta_h} & \text{si } k = h \\ \pm\infty & \text{si } k > h\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le dernièr cas, on choisit $+\infty$ si $\frac{\alpha_k}{\beta_h} > 0$ et $-\infty$ si $\frac{\alpha_k}{\beta_h} < 0$.

(Voir la subsection 1.3 ci-dessous pour la notion de suite divergente vers $\pm\infty$.)

Définition 3. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On suppose que $a_n \neq 0$ pour tout n. On dit que ces suites sont *équivalentes*, écrit $a_n \sim b_n$, lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$.

Exemple 4. (a) $a_n = n^3 \sim b_n = n^3 + 2n + 1$, car
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} = 1\,.$$
Plus généralement, on a pour des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ fixés tels que $\alpha_k \neq 0$:
$$\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0 \sim \alpha_k n^k\,.$$

(b) $\sqrt{n^2+1} \sim n$. En effet,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n^2}\big)} = \sqrt{1} = 1\,.$$

Remarque 3. Dans la partie (b) de l'exemple 4, on a utilisé la propriété suivante :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $I = (a,b)$ et (a_n) est une suite convergente telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ est dans I, alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) = f(\ell)$.

Dans ce cours, on ne donnera pas la définition mathématiquement précise de continuité d'une fonction. Une idée intuitive de cette notion est qu'une fonction réelle est continue sur I lorsqu'on peut tracer son graphe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille.

1.1. Monotonie et propriétés de convergence.

Définition 4. Une suite (a_n) s'appelle

- *croissante*, si $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout n ;
- *décroissante*, si $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n ;
- *monotone*, si elle est soit croissante, soit décroissante.

Exemple 5. (a) Soit $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors la suite (a_n) est croissante, car
$$a_{n+1} - a_n = \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \geq 0\,.$$

(b) Soit $a_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite (a_n) est décroissante.

(c) Les suites dans (a) et (b) sont exemples de suites monotones.

Définition 5. Une suite (a_n) est *majorée* lorsque tous ses termes sont inférieurs à un nombre fixe M, càd $a_n \leq M$ pour tout n. On dit que M est un *majorant* de la suite.

Une suite (a_n) est *minorée* lorsque tous ses termes sont supérieurs à un nombre fixe m, càd $a_n \geq m$ pour tout n. On dit que m est un *minorant* de la suite.

Une suite est *bornée* lorsqu'elle est minorée et majorée à la fois.

Exemple 6. (1) La suite de terme général $a_n = n$ est minorée par $m = 0$. Elle n'est pas majorée.

(2) La suite de terme général $a_n = (-1)^n$ est bornée, car $-1 \leq a_n \leq 1$ pour tout n.

Théorème 1. (a) *Toute suite croissante et majorée est convergente.*

(b) *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

(c) *Toute suite monotone et non bornée est divergente.*

Exemple 7. (1) La suite de terme général $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et majorée par $M = 1$. Elle est donc convergente.

(2) La suite de terme général $a_n = \frac{1}{n}$ est décroissante et minorée par $m = 0$. Elle est donc convergente.

1.2. Limites de référence.

(1) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si $\alpha < \beta$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = 0$.

(2) Pour tous $\alpha > 0$ et $a > 1$ on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

(3) Pour tous $a > 0$ et $c > 0$, si $a < c$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{c^n} = 0$.

En particulier :
- si $a < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. (avec $c = 1$)
- si $1 < c$ alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{c^n} = 0$. (avec $a = 1$)

(4) Pour tout $a > 1$ on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

(5) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(6) Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

1.3. Suites divergentes à $\pm\infty$.

Définition 6. On dit qu'une suite (a_n) est *divergente à* $+\infty$ (ou *a pour limite* $+\infty$), écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}$ (suffisamment grand) il existe un indice N_M tel que pour tout $n \geq N_K$ on a $a_n > M$.

De la même façon, on dit qu'une suite (a_n) est *divergente à* $-\infty$ (ou *a pour limite* $-\infty$), écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}$ (suffisamment négatif) il existe un indice N_M tel que pour tout $n \geq N_M$ on a $a_n < M$.

Exemple 8. Soit $h \in \mathbb{N}$ fixé. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} n^h = +\infty$.

En effet, pour $M \in \mathbb{R}$ donné, on peut choisir $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $N_M > M$. Si $n \geq N_M$, alors $n^h \geq n \geq N_M > M$.

Règles du calcul pour suites divergentes vers $\pm\infty$:

(1) (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$;

(b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et $a_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$;

(c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ et $a_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

(2) Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

(a) Suppose il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \geq b_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, alors aussi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, alors aussi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(b) Si (a_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 9. (1) La suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ a limite $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(2) La condition que $a_n > 0$ pour tout n est nécessaire dans (1)(b). Soit par exemple $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Mais $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ et donc $\{1/a_n\}$ n'a pas limite $+\infty$ ou $-\infty$.

2. Suites de nombres complexes

Dans cette section on considère des suites (a_n) pour lequelles les termes a_n sont des nombres complexes. La définition de suite convergente ou divergente donnée dans la définition 2 s'étend à ce cas, en remplaçant la valeur absolue $|a_n - a|$ par le module $|a_n - a|$ du nombre complexe $a_n - a$. Dans les deux cas, $|a_n - a|$ représente la distance entre a et le terme a_n de la suite.

Les règles de calcul de la limite de sommes, différences, produits et quotients de suites convergentes données pour des suites de nombres réelles sont également valables pour les suites de nombres complexes. Par contre, toute propriété ou règle de calcul énoncée pour des suites de nombres réels et qui utilise des relations d'ordre $\geq$ ou $<$ ne peut pas s'étendre au cas de suites complexes arbitraires.

Exemple 10. On considère la suite de nombres complexes (a_n) où

$$a_n = \big(\frac{1+i}{1-i}\big)^{2n} \qquad (n \geq 0)\,.$$

On a :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-1+2i}{1^2+1^2} = i\,,$$

d'où

$$\Big(\frac{1+i}{1-i}\Big)^{2n} = i^{2n} = (-1)^n$$

Donc (a_n) n'a pas de limite.

A toute suite de nombres complexes (a_n) on associe deux suites de nombres réels, notamment les suites des parties réelles et des partie imaginaires des termes de (a_n) :

Proposition 1. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Pour tout indice n, on écrit $a_n = x_n + iy_n$ où $x_n = \mathrm{Re}(a_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(a_n)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire du nombre a_n. Alors la suite (a_n) converge si et seulement si les deux suites (x_n) et (y_n) convergent. Dans ce cas, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Exemple 11. On considère (a_n) avec $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} i$. Les suites de terme général $\mathrm{Re}(a_n) = \frac{1}{n}$ et $\mathrm{Im}(a_n) = \frac{1}{2^n}$ sont convergentes et ont limites

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0\,.$$

La suite (a_n) est donc convergente, de limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 + 0i = 0$$

Exemple 12. Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe fixé. La nature de la suite géométrique de terme général a^n dépend de la valeur de a. Plus précisement, on a :

- si $|a| < 1$, alors la suite converge vers 0 : $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.
- si $|a| > 1$, alors la suite est divergente.
- si $a = 1$, alors la suite est constante et converge vers 1 : $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors la suite diverge.

Pour être complet, nous donnons la démonstration de cette propriété.

DÉMONSTRATION. La propriété est evidente si $a = 1$. Supposons donc que $a \neq 1$.

Si $a = re^{i\theta}$ avec $r = |a|$, alors $a^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos(n\theta) + ir^n \sin(n\theta)$.

Supposons d'abord que $0 \leq r < 1$. Puisque $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ et les suites de terme général $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sont bornées, on obtient $\lim_{n\to\infty} r^n \cos(n\theta) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} r^n \sin(n\theta) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Avant de considérer les autres cas, on observe que si une suite (b_n) converge vers b pour $n \to \infty$, alors la suite des modules $(|b_n|)$ converge vers $|b|$ (car la function $z \to |z|$ est continue). En appliquant cette propriété à la suite géométrique, on a que si (a^n) converge vers ℓ, alors (r^n) converge vers $|\ell|$.

Pour $r > 1$ la suite (r^n) diverge. Par conséquent, (a^n) ne peut pas converger si $r > 1$.

Supposons maintenant que $r = |a| = 1$. Alors (r^n) est la suite constante de valeur 1 et donc converge vers 1. Si (a^n) converge vers ℓ, alors r^n converge vers $|\ell|$ et donc $|\ell| = 1$. D'autre part, si (a^n) converge vers ℓ, alors la suite (a^{n+1}) converge aussi vers ℓ. Par consequént,

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = \lim_{n\to\infty} aa^n = a \lim_{n\to\infty} a^n = a\ell\,,$$

c'est-à-dire $\ell = a\ell$. Ainsi $\ell(a-1) = 0$. Si $a \neq 1$, alors $\ell = 0$. Ceci est impossible si on doit avoir $|\ell| = 1$. En conclusion, si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors la suite diverge. □

3. Sous-suites

DÉFINITION 7. Une *sous-suite* d'une suite numérique $(a_n)_{n\neq 0}$ est une suite obtenue en choisissant une infinité de termes a_{n_k} avec $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ dans la suite de départ. On note $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ la suite ainsi obtenue.

EXEMPLE 13. (a) En choisant $n_0 = 0 < n_1 = 2 < n_2 = 4 < \cdots < n_k = 2k < \ldots$, la sous-suite qu'on obtient est $a_0, a_2, a_4, \cdots, a_{2k}, \cdots$ des termes d'indices pairs de la suite (a_n). Ainsi $(a_{n_k})_{k\geq 0} = (a_{2k})_{k\geq 0}$.

Par exemple, si (a_n) est la suite donnée par $a_n = (-1)^n$, alors la sous-suite des termes d'indices pairs de cette suite est la suite constante $1, 1, \cdots$.

(b) De même, en choisant $n_0 = 1 < n_1 = 3 < n_2 = 5 < \cdots < n_k = 2k+1 < \ldots$, la sous-suite qu'on obtient est $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k+1}, \cdots$ des termes d'indices impairs de la suite (a_n). Ainsi $(a_{n_k})_{k\geq 0} = (a_{2k+1})_{k\geq 0}$.

Par exemple, si (a_n) est la suite donnée par $a_n = (-1)^n$, alors la sous-suite des termes d'indices impairs de cette suite est la suite constante $-1, -1, \cdots$.

(c) Soit $\varphi : \{0, 1, 2, \ldots, \} \to \{0, 1, 2, \ldots, \}$ une fonction strictement croissante, c'est-à-dire telle que $\varphi(k) < \varphi(k+1)$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$. On pose $n_k = \varphi(k)$, d'où $n_k < n_{k+1}$ pour tout k. Alors $a_{n_k} = a_{\varphi(k)}$ est le terme d'indice k d'une sous-suite de la suite (a_n).

L'exemple (a) de la sous-suite des termes d'indices pairs correspond au choix $\varphi(k) = 2k$; l'exemple (b) au choix $\varphi(k) = 2k+1$. Si on avait chosit $\varphi(k) = k^2$ (qui est une fonction strictement croissante $\varphi : \{0, 1, 2, \ldots, \} \to \{0, 1, 2, \ldots, \}$), on aurait obtenu la sous-suite $a_0, a_1, a_4, a_9, \ldots, a_{k^2}, \ldots$.

PROPOSITION 2. *Soit (a_n) une suite numérique convergente vers le nombre réel L. Alors toute sous-suite $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ de (a_n) est convergente et possède la même limite L, c-est-à-dire* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.

EXEMPLE 14. On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc toute sous-suite de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente et converge vers la limite $L = 0$. Par exemple, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \qquad \text{(c'est la sous-suite des termes d'indices pairs),}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \qquad \text{(c'est la sous-suite des termes d'indices impairs),}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{(c'est la sous-suite correspondante à } \varphi(k) = k^2 \text{).}$$

Remarque 4. La propriété réciproque de la proposition 2 n'est pas vraie : par exemple la suite (a_n) de terme général $a_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. Toutefois, la sous-suite des termes d'indices pairs est la suite constante de valeur 1, donc convergente vers 1 ; de même, la sous-suite des termes d'indices impairs est la suite constante de valeur -1, donc convergente vers -1.