Université de Lorraine, site de Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2018-2019

L1 Algèbre linéaire 1 : partiel du 23 mars 2019, 10h30-12h30

Questions de cours (1.5+1.5 = 3 points)

1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Montrer que F admet au moins un supplémentaire dans E.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E.
   Montrer que si f est surjective et $\mathcal{F}$ est génératrice de E alors $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ est une famille génératrice de F.

Exercice 1. (1 point)
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (2 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = 2x + y$. Montrer que f est linéaire. L'application f est-elle injective ?

Exercice 3. (1+1+1+2+1= 6 points)
Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère $E_n = \mathrm{Vect}((n, 1, 0), (n, 0, 1))$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une base et la dimension de E_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire un système d'équations de E_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver un supplémentaire de E_n dans $\mathbb{R}^3$.
4. Pour $n \neq k$, vérifier que $E_n \neq E_k$ et déterminer $E_n \cap E_k$. On en donnera une base.
5. Déduire des questions précédentes que pour $n \neq k$, $E_n + E_k = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (2+1+2+1+2=8 points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-2y + z, x + 3y - z, 2x + 4y - z).$$

1. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ et montrer que ces trois vecteurs forment un système générateur de Imf.
2. Déterminer une base et la dimension de $Kerf$.
3. En déduire $rg(f)$ et une base de Imf.
4. Calculer $f \circ f$ et en déduire la nature de f.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = Kerf \oplus Imf$. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ autre que la base canonique.