Université de Lorraine, site de Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020

L1 Algèbre linéaire 1

TD1 : ESPACES VECTORIELS

Exercice 1

1. Soient $\mathbb{K}$ un corps et A un ensemble non vide. $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{K}$. On définit sur $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{K})$ une addition et une loi externe comme suit : soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f+g$ est définie par $\forall x \in A, (f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et λf est définie par : $\forall x \in A, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
   Montrer que $\mathcal{F}(\mathcal{A},\mathbb{K})$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
2. Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{F}_0 = \{f \mid f(0)=0\} & , & \mathcal{S} = \{f \text{ deux fois dérivable} \mid f''+f=0\} \\
\mathcal{F}_1 = \{f \mid f(0)=1\} & , & \mathcal{I} = \left\{f \text{ continue} \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\} \\
\mathcal{F}_{0,1} = \{f \mid f(0)=0 \text{ et } f(1)=0\} & , & \mathcal{E}_l = \left\{f \text{ continue} \mid \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l\right\} \\
\mathcal{B} = \{f \text{ bornée}\} & &
\end{array}$$

3. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels.
   (a) Montrer que l'ensemble des suites qui convergent vers zéro est un sous-espace vectoriel.
   (b) L'ensemble des suites croissantes est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,;\, x = 2y+z = 0\}$;
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,;\, x-y+z = 1\}$;

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les trois sous-espaces :

$$E = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, \begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4 = 0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4 = 0 \end{cases}\right\},$$

$$F = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4 = 0 \\ 3x_2+4x_3+2x_4 = 0 \end{cases}\right\},$$

$$G = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4 = 0 \\ 2x_2+x_3+2x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et que $E \cap G$ est une droite vectorielle que l'on déterminera.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les trois sous-espaces $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y+z = 0\}$, $G = \mathbb{R}u$, où $u = (1, 1, 0)$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 3x + 2y + z = 0\}$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F + H$ mais que cette somme n'est pas directe.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G l'ensemble des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + b = 0 \right\}$
2. $E_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\}$.

Exercice 8 Soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et F le sous-ensemble de E formé des polynômes P qui satisfont les propriétés suivantes :

- P est de degré ≤ 3,
- $P(1) = P(0)$,
- $P(-1) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer la forme d'un élément de F.
2. Déterminer l'intersection $F \cap G$ si G est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $P(X) = X$.