Université de Lorraine, site de Metz
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020

L1 Algèbre linéaire 1

TD2 : ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Exercice 1 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Les vecteurs $u = (1, 5, 7)$ et $v = (1, 3, 4)$ sont-ils linéairement indépendants ? Même question pour u, v et w où $w = (1, 2, 3)$.
2. Considérons $u_1 = (1, -3, 7)$, $u_2 = (2, -1, -1)$, $u_3 = (-4, 2, 2)$, la famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Ecrire, si cela est possible :
   u_3 comme combinaison linéaire de u_1 et u_2 ;
   u_1 comme combinaison linéaire de u_2 et u_3 ;
   u_2 comme combinaison linéaire de u_1 et u_3.
3. Étant donné $x = (1, 2, 1)$ déterminer y tel que (x, y) soit une famille libre. Déterminer alors z tel que (x, y, z) soit une famille libre.
4. Déterminer lesquelles parmi les familles suivantes sont génératrices de $\mathbb{R}^3$:
   (u, v) ; (u, v, w) ; (u, v, w, x) ; (u, u_1, u_2, u_3).

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Les familles de vecteurs suivantes de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ?

1. $(2e_1 + e_2\ ,\ -e_1 + e_2)$,
2. $(-6e_1 + 2e_2\ ,\ te_1 - 3e_2)$ (on discutera suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$),
3. $(2e_2\ ,\ e_1 + 2e_2\ ,\ -e_1 + 2e_2)$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Les familles de vecteurs suivantes de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.

1. $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ -e_1 + e_2 + e_3)$,
2. $(e_1 - e_3\ ,\ -e_1 + e_2\ ,\ -e_2 + e_3)$,
3. $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ 2e_1 - e_2 + 2e_3\ ,\ e_1 - 2e_2 - e_3)$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1 - i)e_1 + ie_2 + (1 + i)e_3, \quad u_2 = -e_1 + e_2 + 3e_3, \quad u_3 = (1 - i)e_1 + ie_2 + ie_3.$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1+i)e_1+2e_2+ie_3$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 5 Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel $E = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,;\, 2z_1 + z_2 - 3z_3 = 0\}$.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - t &= 0 \\ x - y + z + 2t &= 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base de F et déterminer la dimension de F.
2. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (0, 3, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, 1)$ et $w = (2, 0, 1, -1)$. Déterminer une base et la dimension de G.
3. Déterminer un système d'équations de G.
4. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
5. En déduire la dimension $F + G$ puis $F + G$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $(2, 2)$ à coefficients réels. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,;\, {}^tA = A\}$.

Exercice 8 Soit $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $d \leq 3$.

1. Montrer que $(X^3+1, X^2-X, X-1, X^2+1, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base B de $\mathbb{R}_3[X]$ contenue dans cette famille.

Exercice 9 Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par les systèmes d'équations suivants :

$$E \;:\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad , \quad F \;:\; \begin{cases} x - 2y - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E + F$.

Exercice 10

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = 1$ (la fonction constante) sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$.
2. Soient n un nombre entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts. Pour $j = 1, \ldots, n$ on note $f_j(x) = e^{a_j x}$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}$.
3. Est-ce que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie ?

Exercice 11 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Considérons les vecteurs $u = -e_1 + e_3$,$v = e_1 + e_2 - e_3$,$w = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $a = 2e_1 + e_2 - e_4$ et $b = e_1 + e_3 + e_4$ et les sous-espaces vectoriels F et G engendrés respectivement par (u, v, w) et (a, b).

1. Déterminer une base et la dimension de F puis de G. Écrire la formule de Grassmann et en déduire que F et G ne sont pas en somme directe.
2. Déterminer une base et la dimension de $F + G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

3. Trouver un système d'équations de F et de G, puis en déduire un système d'équations de $F \cap G$ et une base de $F \cap G$.
4. Compléter la base de $F \cap G$ obtenue à la question précédente par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E. En déduire un supplémentaire de $F \cap G$ dans E.

Exercice 12

On note $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en x à coefficients réels et de degré ≤ 3. Soit $E = \mathrm{Vect}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par

$$p_1(x) = x + x^2\,, \quad p_2(x) = 1 + x^2 + x^3\,, \quad p_3(x) = 1 - x + x^3\,, \quad p_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3\,.$$

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercice 13 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

et soit G défini par

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension 5 de base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soit α un nombre réel. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_3 + e_5, -e_1 + e_2 + 4e_3 + 5e_4)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2 - 5e_3 + 2e_4 + 4e_5, 2e_1 + e_2 - 16e_3 - e_4 + \alpha e_5)$. Sont-ils supplémentaires ? Leur somme est-elle directe ?