CHAPTER I : ESPACES VECTORIELS

§1 DEFINITIONS ET EXEMPLES

Par la suite, $\mathbb{K}$ dénote soit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels,

soit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

DEF 1 On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble (non vide) E muni de deux lois de composition :

- une loi de composition interne, dite addition et notée $+$, càd une application

$$+ : E \times E \to E$$
$$(u,v) \mapsto u+v$$

- une loi de composition externe, dite multiplication scalaire et notée $\cdot$, càd une application

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$
$$(\lambda,u) \mapsto \lambda \cdot u \quad \text{(ou simplement } \lambda \cdot u)$$

vérifiant les conditions suivantes :

(EV1) (associativité) $\forall u,v,w \in E \quad (u+v)+w = u+(v+w)$

(EV2) il existe un élément de E, noté 0_E (ou simplement 0) et appelé élément neutre ou vecteur nul, tel que pour tout $u \in E$ on a : $u+0_E = 0_E+u = u$.

(EV3) chaque $u \in E$ possède un opposé, càd un élément de E, noté $-u$, tel que $u+(-u) = (-u)+u = 0_E$

(EV4) (commutativité) $\forall u,v \in E, \quad u+v = v+u$,

et, en écrivant λu au lieu de $\lambda \cdot u$,

(EV5) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(EV6)} \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E & (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u \\ \text{(EV7)} \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u,v \in E & \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \end{array}\right\} \text{(lois distributives)}$$

(EV8) $\forall u \in E \quad 1 \cdot u = u$ (où 1 est le nombre réel ou complexe 1)

Les éléments de E sont dit vecteurs ; ceux de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires

NOTATION On abrègera "espace vectoriel" en "ev".

REMARQUES

(1) Les conditions (EV1), (EV2), (EV3) disent que $(E,+)$ est un groupe ; les conditions (EV1) à (EV4) disent que $(E,+)$ est un groupe commutatif (ou abélien)

(2) Plus généralement, on peut définir un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des opérations usuelles de somme et produit de nombres sont des

corps commutatifs. De même, $\mathbb{Q}$ (= les nombres rationnels) muni des opérations usuelles de somme et produit de nombres rationnels est un corps commutatif. Voir [G], Appendice 1 pour plus d'information sur les corps commutatifs

EXEMPLES

(1) Sur $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ on définit:

addition dans $\mathbb{R}$

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

produit dans $\mathbb{R}$

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces lois de composition est un ev sur $\mathbb{R}$.

(EV1) $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, on a, par déf de $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) \qquad (*) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) \qquad (**) \end{aligned}$$

L'addition de $\mathbb{R}$ est associative : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ on a $(a+b)+c = a+(b+c)$. Par conséquent, $(*)$ et $(**)$ sont égaux car $(x_j + y_j) + z_j = x_j + (y_j + z_j)$ pour $j = 1, 2$. Ceci montre (EV1).

(EV4) $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) && [\text{d'après la déf de } + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2] \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) && [\text{car } a+b = b+a \ \forall a, b \in \mathbb{R}] \\ &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) && [\text{d'après la déf de } + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2] \end{aligned}$$

(EV2) $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ car pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (0,0) &= (x_1 + 0, x_2 + 0) && [\text{d'après la déf de } + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2] \\ &= (x_1, x_2) \end{aligned}$$

De même : $(0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ [directement ou bien d'après (EV4)]

(EV3) L'opposé $-(x_1, x_2)$ de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est $(-x_1, -x_2)$, car

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) &= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2)) && [\text{d'après la déf de } + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2] \\ &= (0,0) && [\text{car } a + (-a) = a - a = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}] \end{aligned}$$

De même, $(-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) = (0,0)$ [par ex., en utilisant (EV4)]

[G] = J. Grifone, Algèbre linéaire,

(EV5) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lambda(\mu(x_1,x_2)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2))$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2)$$ [car $a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$]

$$= (\lambda\mu)(x_1,x_2)$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

(EV6) $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$

$$(\lambda+\mu)(x_1,x_2) = ((\lambda+\mu)x_1, (\lambda+\mu)x_2)$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2)$$ [d'après la loi distributive de $\mathbb{R}$: $(a+b)c = ac+bc \quad \forall a,b,c$]

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2)$$ [d'après la déf de $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= \lambda(x_1,x_2) + \mu(x_1,x_2)$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

(EV7) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2)$$ [d'après la déf de $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= (\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2))$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2)$$ [d'après la loi distributive de $\mathbb{R}$: $a(b+c) = ab+ac \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$]

$$= (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\lambda y_1, \lambda y_2)$$ [d'après la déf de $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= \lambda(x_1,x_2) + \lambda(y_1,y_2)$$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

(EV8) $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad 1\cdot(x_1,x_2) = (1\cdot x_1, 1\cdot x_2)$ [d'après la déf de $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$]

$$= (x_1,x_2)$$ [car $1\cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$]

(1') L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-tuples $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de nombres réels $x_1,x_2,\dots,x_n$ est un ev sur $\mathbb{R}$ lorsqu'on le munit des lois de composition suivantes :

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, déf par $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ addition dans $\mathbb{R}$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, déf par $\lambda\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ produit dans $\mathbb{R}$

pour tous $(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tous $\lambda \in \mathbb{R}$

La preuve que (EV1) à (EV8) sont satisfaites est semblable à celle du cas $n=2$. On remarque que : $0_{\mathbb{R}^n} = (0,0,\dots,0)$

l'opposé $-(x_1,\dots,x_n)$ de $(x_1,\dots,x_n)$ est $(-x_1,\dots,-x_n)$

REMARQUE : Pour $n=1$, on obtient que $\mathbb{R}$ est un ev sur $\mathbb{R}$.

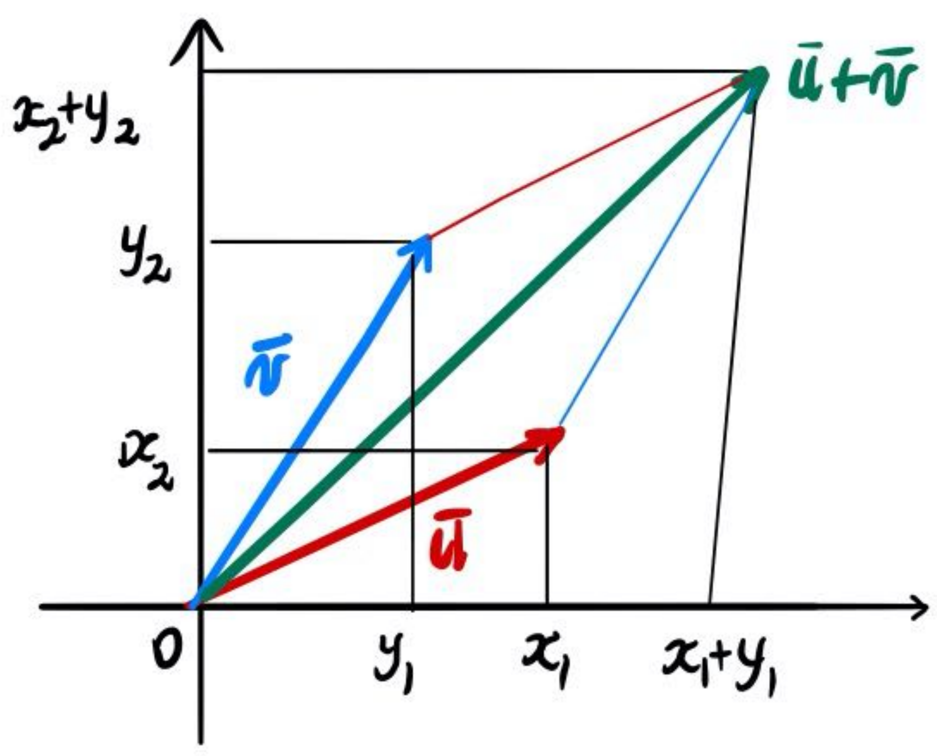
(2) Les lois $+$ et $\cdot$ données dans (1') munissent l'ensemble $\mathbb{C}^n$ des n-tuples $(x_1,\dots,x_n)$ de nombres

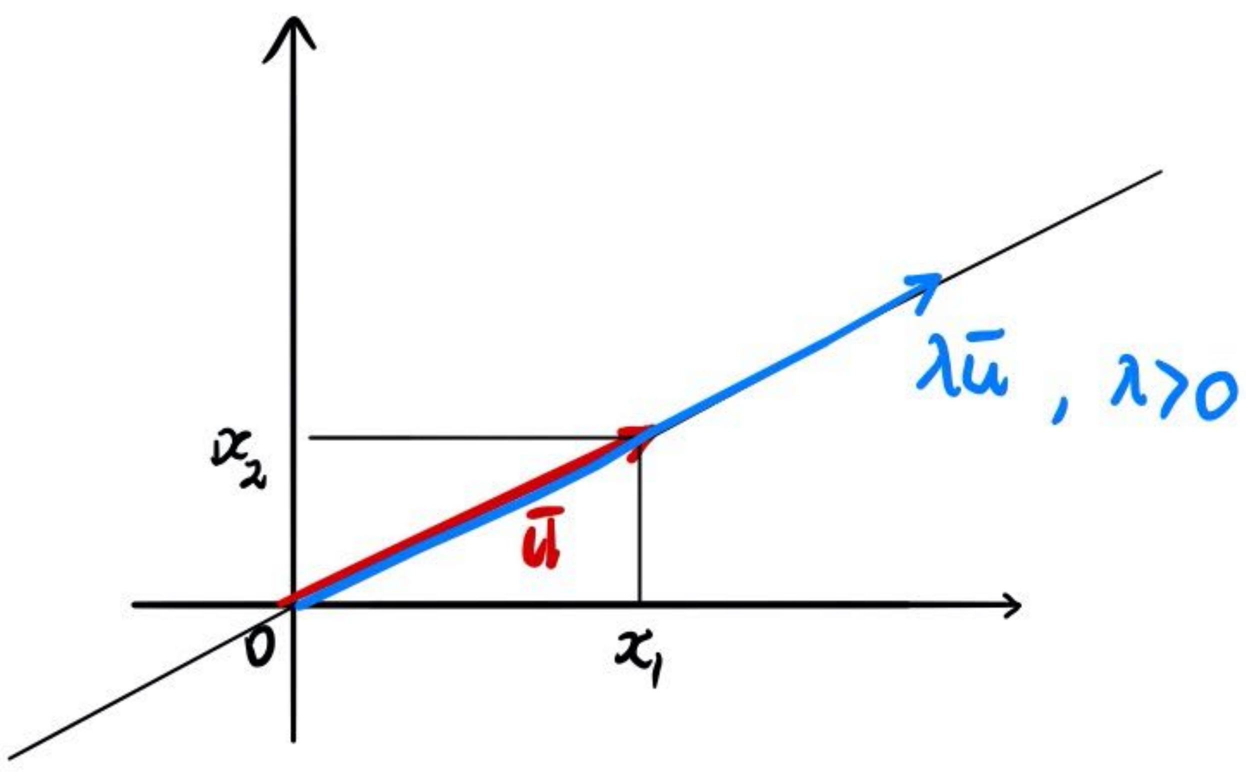
complexes d'une structure d'ev sur $\mathbb{C}$

REMARQUE

Si on identifie $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ avec le vecteur d'origine $O=(0,0)$ et d'extrémité (x_1,x_2) :

- l'addition dans $\mathbb{R}^2$ correspond à la somme de vecteurs par la règle du parallélogramme
- la multiplication scalaire dans $\mathbb{R}^2$ est le produit d'un vecteur par un nombre réel :





Une interprétation physique analogue est possible pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(3) On note $M_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un élément de $M_2(\mathbb{K})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ avec $a_{ij}\in\mathbb{K}$ $(j=1,2)$

a_{ij} : i-ème ligne, j-ème colonne

On définit sur $M_2(\mathbb{K})$ une structure d'ev sur $\mathbb{K}$ comme suit :

$$+ :\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$$

$$\cdot :\ \lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}$$

pour tous $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$ et tous $\lambda\in\mathbb{K}$

On peut vérifier que (EV1) jusqu'à (EV8) sont satisfaits. En particulier :

L'élément neutre $0_{M_2(\mathbb{R})}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est la <u>matrice nulle</u>

L'opposé $-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22}\end{pmatrix}$

(3') On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note $A=(a_{ij})$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ donc le coefficient à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est a_{ij}. On dit que a_{ij} est le coefficient

a_{ij} : i-ème ligne, j-ème colonne

d'indices (i,j). Explicitement :

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \Big\}\ m\text{-lignes}$$

On muni $M_{m,n}(\mathbb{K})$ d'une structure d'ev sur $\mathbb{K}$ en posant :

$$\left.\begin{array}{l} + : \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) \underset{\text{déf}}{=} (\underbrace{a_{ij} + b_{ij}}_{\text{addition de } \mathbb{K}}) \\ \cdot : \quad \lambda (a_{ij}) \underset{\text{déf}}{=} (\underbrace{\lambda a_{ij}}_{\text{produit de } \mathbb{K}}) \end{array}\right\} \text{ pour tous } (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}$$

On peut vérifier que les propriétés (EV1) à (EV8) sont satisfaites. En particulier :

- Le vecteur nul de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est $0_{M_{m,n}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, la matrice nulle de taille $m \times n$ (tous ses coefficients sont 0) ;
- l'opposé de $A = (a_{ij})$ est $-A = (-a_{ij})$

Si $m = n$, on écrit $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$

(4) On considère $E = \{0\}$ (ensemble à un élément) muni des lois de composition :

$+ : E \times E \to E$ déf par $0 + 0 = 0$

$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ déf par $\lambda 0 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

E est ainsi muni d'une structure d'ev sur $\mathbb{K}$. On l'appelle l'<u>ev nul</u> sur $\mathbb{K}$.

(5) On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une variable X et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Tout élément de $\mathbb{K}[X]$ est une expression P de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_m X^m = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$ fixé et $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$

Si $a_m \neq 0$, alors m est le <u>degré de P</u>

<u>NOTATION</u> : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Si on définit $a_k = 0$ pour $k \geq m$, on peut aussi écrire

$$P(X) = \sum a_k X^k$$

cette somme étant finie car elle comporte seulement un nombre fini de coefficients $\neq 0$.

On muni $\mathbb{K}[X]$ de la structure d'ev sur $\mathbb{K}$ par rapport aux lois suivantes :

$$\sum_k a_k X^k + \sum_k b_k X^k = \sum_k (a_k + b_k) X^k$$

$$\lambda \left(\sum_k a_k X^k \right) = \sum (\lambda a_k) X^k$$

pour tous $\sum_k a_k X^k, \sum b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ici : $0_{\mathbb{K}[X]}$ est le polynôme nul 0 (dont tous les coefficients sont nuls) et l'opposé de $\sum a_k X^k$ est $\sum_k (-a_k) X^k$

Ex : Si $P(X) = X^2 + X$, $Q(X) = X^3 + 2X + 1$, alors $P + Q$ est obtenu en sommant les coefficients des termes semblables (càd des mêmes puissances X^k de la variable X). Ainsi $(P+Q)(X)=X^3+X^2+3X+1$. En autre, $(2P)(X)=2X^2+2X$ et $(-P)(X)=-X^2-X$.

(6) Soit A un ensemble non vide et E un ev sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathcal{F}(A;E)$ (ou E^A) l'ensemble des applications définies sur A à valeurs dans E.

Pour $f,g\in\mathcal{F}(A;E)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ on définit les applications

$$f+g: A\to E \quad \text{par} \quad (f+g)(x)=f(x)\underbrace{+}_{\text{addition dans } E}g(x) \quad \text{pour tout } x\in A$$

$$\lambda f: A\to E \quad \text{par} \quad (\lambda f)(x)=\lambda\underbrace{\,}_{\text{multiplication scalaire dans } E} f(x)$$

Muni de ces lois, $\mathcal{F}(A;E)$ est un ev sur $\mathbb{K}$. Dans cet ev, le vecteur nul $0_{\mathcal{F}(A;E)}$ est l'application nulle, càd $0_{\mathcal{F}(A;E)}: A\to E$ est donnée par $0_{\mathcal{F}(A;E)}(x)=0_E$ $\forall x\in A$. En autre, l'opposé de $f\in\mathcal{F}(A;E)$ est l'application $-f: A\to E$ définie pour tout $x\in A$ par $(-f)(x)=\underbrace{-f(x)}_{\text{opposé de } f(x) \text{ dans } E}$

Deux cas particuliers importants pour $E=\mathbb{K}$:

- Si $A=\mathbb{N}$, alors $\mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) est l'ensemble des suites à termes dans $\mathbb{K}$ lorsqu'on identifie la fonction $f:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ avec la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n=f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
- Si $A=\{1,2,\dots,n\}$, alors $\mathcal{F}(\{1,2,\dots,n\};\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}^n$ (en identifiant $f:\{1,2,\dots,n\}\to\mathbb{K}$ avec $(x_1,\dots,x_n)$ où $x_j=f(j)$ $\forall j=1,\dots,n$

(7) PRODUIT CARTESIEN : Soient E_1 et E_2 deux ev sur $\mathbb{K}$. Le produit cartésien de E_1 et E_2 est l'ensemble $E_1\times E_2=\{(u_1,u_2)\ ;\ u_1\in E_1,\ u_2\in E_2\}$

On muni $E_1\times E_2$ des lois

$$+: (E_1\times E_2)\times(E_1\times E_2)\to E_1\times E_2,\ \text{où}\ (u_1,u_2)+(v_1,v_2)\underset{\text{déf}}{=}(u_1\underbrace{+}_{\text{addition dans } E_1}v_1,\ u_2\underbrace{+}_{\text{addition dans } E_2}v_2)\quad \forall u_1,v_1\in E_1,\ u_2,v_2\in E_2$$

$$\cdot: \mathbb{K}\times(E_1\times E_2)\to E_1\times E_2,\ \text{où}\ \lambda(u_1,u_2)\underset{\text{déf}}{=}(\underbrace{\lambda u_1}_{\text{multiplication scalaire de } E_1},\underbrace{\lambda u_2}_{\text{multiplication scalaire de } E_2})$$

On peut montrer que (EV1) à (EV8) sont vérifiés. En particulier : $0_{E_1\times E_2}=(0_{E_1},0_{E_2})$ et l'opposé de (u_1,u_2) est $-(u_1,u_2)=(-u_1,-u_2)$

On peut étendre cette construction à $E_1\times E_2\times\dots\times E_n$ où $E_1,E_2,\dots,E_n$ sont ev sur $\mathbb{K}$. Par exemple, si $E_j=\mathbb{K}$ pour $j=1,\dots,n$, l'espace vectoriel $\underbrace{\mathbb{K}\times\dots\times\mathbb{K}}_{n\text{-fois}}$ coïncide avec $\mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 1 Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

(1) Si $v, w \in E$ et $v+u = w+u$, alors $v = w$.

En particulier : si $u+u = u$, alors $u = 0_E$

(2) $\lambda u = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

(3) $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$

Preuve

(1) $\left.\begin{array}{l} v \underset{(EV2)}{=} v + 0_E \underset{(EV3)}{=} v + (u+(-u)) \underset{(EV1)}{=} (v+u)+(-u) \\ w = w + 0_E = w + (u+(-u)) = (w+u)+(-u) \end{array}\right\} =$ car $v+u = w+u$. Ainsi $v = w$.

En particulier : si $u+u = u$, alors $u+u = u = u + 0_E$, d'où $u = 0_E$ d'après (1) avec $v = u, w = 0_E$.

(2) $\Leftarrow$: Si $\lambda = 0$, alors $0u = (0+0)u$ [car $0+0=0$ dans $\mathbb{K}$]

$= 0u + 0u$ [d'après (EV6)]

Donc $0u = 0_E$ d'après (1).

Si $u = 0_E$, alors $\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E)$ [d'après (EV2)]

$= \lambda 0_E + \lambda 0_E$ [d'après (EV6)]

Donc $\lambda 0_E = 0_E$ d'après (1).

$\Rightarrow$: Il suffit de montrer que si $\lambda u = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $u = 0_E$.

Si $\lambda \neq 0$, alors λ possède un réciproque $\frac{1}{\lambda}$ dans $\mathbb{K}$. D'après l'implication "$\Leftarrow$" qu'on vient de montrer, on a $\frac{1}{\lambda}0_E = 0_E$. Donc : $0_E = \frac{1}{\lambda}0_E = \frac{1}{\lambda}(\lambda u)$ [d'après l'hypothèse $\lambda u = 0_E$]

$= (\frac{1}{\lambda}\lambda)u$ [d'après (EV5)]

$= 1 \cdot u$

$= u$ [d'après (EV8)]

(3) $(-\lambda)u + \lambda u = (-\lambda+\lambda)u$ [d'après (EV6)]

$= 0u$

$= 0_E$ [d'après (2)]

De même, ou en utilisant (EV4), on a

$\lambda u + (-\lambda)u = 0_E$

Donc $(-\lambda)u$ est l'opposé de λu, càd $(-\lambda)u = -(\lambda u)$.

$\lambda(-u) + \lambda u = \lambda((-u)+u)$ [d'après (EV7)]

$= \lambda \cdot 0_E$ [d'après (EV2)]

$= 0_E$ [d'après (2)]

De même, ou en utilisant (EV4), on a

$\lambda u + (-\lambda)u = 0_E$

Donc $\lambda(-u)$ est l'opposé de λu, càd $\lambda(-u) = -(\lambda u)$. $\square$

Remarques

(1) L'élément neutre 0_E est unique : si $0'_E \in E$ est tel que $u + 0'_E = u = 0'_E + u$ pour tout $u \in E$, alors pour $u = 0'_E$ on obtient $0'_E + 0'_E = 0'_E$, d'où $0'_E = 0_E$ d'après (1).

(2) L'opposé $-u$ de $u \in E$ est unique : si $u' \in E$ satisfait $u' + u = 0_E = u + u'$, alors $u' + u = (-u) + u$, d'où $u' = -u$ d'après (1).

(3) NOTATION : d'après la proposition 1 (3), on peut écrire sans ambiguïté $-\lambda u$ au lieu de $-(\lambda u)$. On écrira aussi $u - v$ au lieu de $u + (-v)$.

§2 SOUS-ESPACES VECTORIELS

DÉF 2 Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $F \subset E$ une partie non vide. On dit que F est un <u>sous-espace vectoriel</u> de E (abrégé : <u>sev</u> de E) si F, muni des restrictions des lois de E, est un ev sur $\mathbb{K}$.

Cette définition demande implicitement que la restriction à F des lois de E donne des lois de F, càd que l'addition <u>dans E</u> de deux vecteurs de F donne un vecteur de F et la multiplication scalaire <u>dans E</u> d'un vecteur de F par un scalaire de $\mathbb{K}$ donne un vecteur de F. Ensuite, on devrait vérifier que les huit axiomes (EV1) à (EV8) sont satisfaits par F muni des lois par restriction. En fait, les axioms sont vérifiés automatiquement, comme le montre la propriété suivante.

PROPOSITION 2 Une partie $F \subset E$ est un sev de E si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) $F \neq \emptyset$

addition de E (on en n'a pas d'autres...)

(b) $\forall u, v \in F$ on a $u + v \in F$ (autrement dit : F est <u>stable</u> pour l'addition de E)

(c) $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u \in F$ (— " — : F est <u>stable</u> pour la multiplication scalaire de E)

multiplication scalaire de E

Preuve

C'est clair que (a), (b), (c) doivent être satisfaits si F est un sev de E. Réciproquement, supposons que F satisfait (a), (b), (c). Alors la restriction à F des lois de E donne des lois $+ : F \times F \to F$ et $\cdot : \mathbb{K} \times F \to F$ (à priori, ces applications sont à valeurs dans E et pas dans F : c'est (b) et (c) qui l'assurent). On doit montrer que (EV1) jusqu'à (EV8) sont satisfaits.

Les axiomes (EV1) et (EV4)-(EV8) sont vérifiés par tous les éléments de E, donc en particulier par ceux de F. Il reste à vérifier (EV2) [= existence du vecteur nul] et (EV3) [= existence de l'opposé de tout élément de F].

Pour (EV2) : il suffit de montrer que $0_E \in F$. Pour cela, on utilise (a) et (c). Puisque $F \neq \emptyset$, il existe $u \in F$. D'après (c) et la proposition 1, on obtient que $0_E = 0u \in F$.
Pour (EV3) : puisque le vecteur nul de F coïncide avec 0_E, il suffit de montrer que pour tout $u \in E$ l'opposé $-u$ de u dans E appartient à F. Or, d'après la proposition 1 et (EV8), pour $u \in F$ on a
$-u = -(1 \cdot u) = (-1)u \in F$ □

Remarques

(1) On a vérifié dans la preuve de la proposition 2 que le vecteur nul 0_F d'un sev F de E coïncide avec 0_E et que l'opposé dans F d'un élément u de F coïncide avec l'opposé $-u$ de u dans E.

(2) Puisque 0_E doit appartenir à tout sev F de E, pour vérifier qu'une partie F de E est un sev de E, on peut remplacer la condition (a) par (a') : $0_E \in F$.
Les deux conditions (b) et (c) peuvent être unifiées en une seule, comme dans le corollaire 1.

COROLLAIRE 1

Une partie F d'un ev E est un sev de E si et seulement si
(a) $0_E \in F$
(b) $\forall u, v \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u + v \in F$ (autrement dit : F est <u>stable</u> pour les lois de E)
(b) est aussi équivalente à (b') : $\forall u, v \in F$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.

EXEMPLES

(0) $\{0_E\}$ et E sont toujours des sev de E.

(1) On munit $\mathbb{R}^2$ de la structure d'ev sur $\mathbb{R}$ usuelle (voir exemple 1 (1))

- $F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 = x_2\} = \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$. En effet :
  (a) $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F_1$
  (b) $\forall (x,x), (y,y) \in F_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $\underbrace{\lambda(x,x) + (y,y)}_{\text{lois de } \mathbb{R}^2} = (\lambda x + y, \lambda x + y) \in F_1$.
- $F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 1\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$ car, par exemple, $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin F_1$.
- $F_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. En fait, F_3 n'est pas stable pour la multiplication scalaire de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(1,0) \in F_3$ mais $(-1,0) = (-1)(1,0) \notin F_4$

(2) On peut considérer $\mathbb{C} = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{R}\}$ en tant qu'ev sur $\mathbb{R}$ par restriction à $\mathbb{R}$ de la loi de multiplication scalaire, càd par rapport aux lois définies comme suit :

$$\left.\begin{array}{ll} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & \lambda(a+ib) = (\lambda a) + i(\lambda b) \end{array}\right\} \text{pour tous } a+ib, c+id \in \mathbb{C} \text{ (avec } a,b,c,d \in \mathbb{R}) \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On écrit $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ pour $\mathbb{C}$ muni de cette structure d'ev sur $\mathbb{R}$. $\underbrace{\text{lois de } \mathbb{C}_{\mathbb{R}}}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ est un sev de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. En effet : $\mathbb{R} \neq \emptyset$ et $\forall a,c \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda a + c \in \mathbb{R}$

(3) Une <u>équation différentielle linéaire homogène d'ordre n</u> est une équation de la forme

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = 0 \qquad (DE_n)$$

où
- y dénote la fonction inconnue, fonction de la variable réelle x
- $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ sont des fonctions définies et continues sur un même intervalle $I=(a,b) \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réels

Si les fonctions $a_j(x)$ sont constantes, on parle d'équation linéaire homogène <u>à coefficients constants</u>.

EX: $y'' + 2y' - 3y = 0$ est une équation différentielle homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Une fonction $y=\phi(x)$ est une <u>solution</u> de (DE_n) sur I si y est n-fois dérivable sur I et satisfait l'équation différentielle (DE_n)

EX: $y=e^x$ est une solution de $y''+2y'-3y=0$ sur $I=\mathbb{R}$ car 2 fois dérivable et satisfait l'équation [car $(e^x)'' + 2(e^x)' - 3e^x = e^x + 2e^x - 3e^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$]

L'ensemble des solutions de (DE_n) est un sev de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$

- L'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I est un sev $D^n(I)$ de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, car :
  - (a) $0_{\mathcal{F}(I;\mathbb{R})}$ est dérivable autant de fois que l'on veut, avec dérivée $0_{\mathcal{F}(I;\mathbb{R})}$
  - (b) pour tout k, si f,g ont dérivée d'ordre k et $\lambda \in \mathbb{R}$, aussi $\lambda f + g$ possède dérivée d'ordre k et $\frac{d^k}{dx^k}(\lambda f + g) = \lambda \frac{d^k f}{dx^k} + \frac{d^k g}{dx^k}$ $\quad (*)$
- L'ensemble $\mathcal{S}_{DE_n}$ des solutions de (DE_n) est un sev de $D^n(I)$ (et donc de $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$) car
  - (a) $0_{\mathcal{F}(I;\mathbb{R})}$ est solution (substitution dans l'équation donne $a_n(x)\cdot 0 + \dots + a_1(x)\cdot 0 + a_0(x)\cdot 0 = 0 \ \forall x \in I$)
  - (b) Si f,g sont solutions, alors d'après $(*)$, pour tout $x \in I$

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}(\lambda f+g)(x) + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx}(\lambda f+g)(x) + a_0(x)(\lambda f+g)(x)$$
$$= a_n(x)\left[\lambda \frac{d^n f}{dx^n}(x) + \frac{d^n g}{dx^n}(x)\right] + \dots + a_1(x)\left[\lambda\frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x)\right] + a_0(x)\left[\lambda f(x) + g(x)\right]$$
$$= \lambda \underbrace{\left[a_n(x)\frac{d^n f}{dx^n}(x) + \dots + a_1(x)\frac{df}{dx}(x) + a_0(x) f(x)\right]}_{=0 \text{ car } f \text{ est solution}} + \underbrace{\left[a_n(x)\frac{d^n g}{dx^n}(x) + \dots + a_1(x)\frac{dg}{dx}(x) + a_0(x) g(x)\right]}_{=0 \text{ car } g \text{ est solution}} = 0$$

EX $y = e^{-3x}$ est aussi solution de $y''+2y'-3y=0$ car $(e^{-3x})'' + 2(e^{-3x})' - 3e^{-3x} = 9e^{-3x} - 6e^{-3x} - 3e^{-3x} = 0$

Donc $y = \lambda e^x + \mu e^{-3x}$ est solution de $y''+2y'-3y=0$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (et en fait, toute solution de $y''+2y'-3y=0$ est de cette forme pour un choix de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, comme sera montré en analyse)

DEF 3 Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et $u_1,\dots,u_m \in E$.

Une <u>combinaison linéaire</u> de $u_1,\dots,u_m$ est un élément de E de la forme $\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_m u_m$ avec $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{K}$. Le <u>sous-espace vectoriel de E</u> engendré par $u_1,\dots,u_m$, noté $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m)$ est l'ensemble de tous les éléments de E qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de $u_1,\dots,u_m$, càd

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m)=\{u\in E;\ \exists \lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{K} \text{ tels que } u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_m u_m\}$$

<u>Remarque</u> On montrera ci-dessous que $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m)$ est bien un sev de E ; le nom est donc approprié.

DEF 3' Soit $\mathcal{A}\subset E$ une partie non vide d'éléments de E. Le <u>sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{A}$</u>, noté $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$, est l'ensemble de tous les éléments de E qui sont combinaison linéaire d'<u>un nombre fini</u> d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{A})=\{u\in E:\ \exists m\in\{1,2,\dots\},\ \exists u_1,\dots,u_m\in\mathcal{A},\ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{K} \text{ tels que } u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_m u_m\}$$

<u>Remarques</u>

(1) On montrera ci-dessous (prop. 3) que $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$ est bien un sev de E.

(2) On peut étendre la déf au cas où $\mathcal{A}=\emptyset$ est l'ensemble vide. Dans ce cas, on définit $\mathrm{Vect}(\emptyset)=\{0_E\}$

(3) Si $\mathcal{A}=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_m)$. En fait, $\mathrm{Vect}(\{u_1,u_2,\dots,u_m\})$ est l'ensemble de tous les vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre de vecteurs choisis parmi $u_1,\dots,u_m$. Toute combinaison linéaire de ce type peut s'étendre à une combinaison linéaire de <u>tous</u> les vecteurs $u_1,\dots,u_m$ en ajoutant des coefficients 0 ; par ex : $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+0\cdot u_3+\dots+0\,u_m$. □

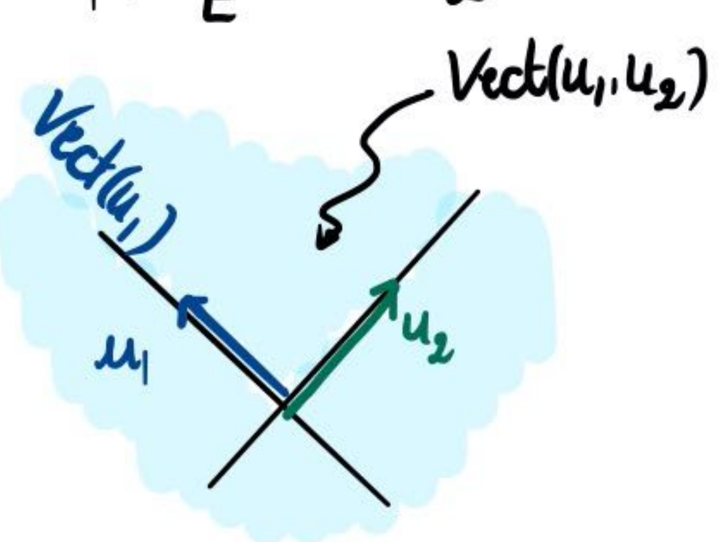
EXEMPLES

(1) Soit $u\in E$, $u\neq\emptyset$. Alors $\mathrm{Vect}(u)=\{v\in E:\ \exists\lambda\in\mathbb{K}:\ v=\lambda u\}$ s'appelle la <u>droite vectorielle engendrée par u</u>. On utilise aussi la notation $\mathrm{Vect}(u)=\mathbb{K}u=\{\lambda u;\ \lambda\in\mathbb{K}\}$.
On dit que $v\in E$ est <u>colinéaire</u> à u, $u\neq 0_E$, s'il existe $\lambda\in E$ tel que $v=\lambda u$. Ainsi, pour $u\neq 0_E$, les éléments de $\mathrm{Vect}(u)$ sont les éléments de E qui sont colinéaires à u.

(2) Soient $u_1,u_2\in E$, différents de 0_E et pas colinéaires (équivalent : $u_1\neq 0_E$ et $u_2\notin\mathrm{Vect}(u_1)$). Alors

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2)=\{u\in E;\ \exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}:\ u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\}$$

est dit le <u>plan vectoriel engendré par u_1 et u_2</u>



(REM : Si $u_2\in\mathrm{Vect}(u_1)$, alors $\mathrm{Vect}(u_1,u_2)=\mathrm{Vect}(u_1)$)

PROPOSITION 3 Soient E un ev sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{A} \subset E$ une partie non vide de E. Alors :

(1) $Vect(\mathcal{A})$ est un sev de E et le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E qui contient $\mathcal{A}$, càd :

(a) $\mathcal{A} \subset Vect(\mathcal{A})$

(b) $Vect(\mathcal{A})$ est un sev de E

(c) Si F est un sev de E et $\mathcal{A} \subset F$, alors $Vect(\mathcal{A}) \subset F$

(2) Si $\phi \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset E$, alors $Vect(\mathcal{A}) \subset Vect(\mathcal{B})$

Cette proposition vaut en particulier pour $Vect(u_1, \dots, u_m) = Vect(\{u_1, \dots, u_m\})$

__Preuve__

(1) (a) $\forall u \in \mathcal{A}$ on a $u = \overset{\in \mathbb{K}}{1} \cdot u \in Vect(\mathcal{A})$, d'où $\mathcal{A} \subset Vect(\mathcal{A})$

(b) $\mathcal{A} \neq \phi$ et $\mathcal{A} \subset Vect(\mathcal{A})$, d'où $Vect(\mathcal{A}) \neq \phi$. En autre, $Vect(\mathcal{A})$ est stable pour les lois de E.
En effet, $\forall u, v \in Vect(\mathcal{A}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\exists m, m \in \{1, 2, \dots\}$, $\exists u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \in \mathcal{A}$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$ et $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m$. Ainsi

$$\lambda u + v = \lambda(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m) = (\lambda\lambda_1)u_1 + \dots + (\lambda\lambda_m)u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_m v_m \in Vect(\mathcal{A})$$

car il s'agit d'une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$.

(c) Si $u \in Vect(\mathcal{A})$, il existe $m \in \{1, 2, \dots\}$, $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m$.
Or, $\mathcal{A} \subset F$, d'où $u_1, \dots, u_m \in F$ et F est un sev de E et donc toute combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_m$ est dans F. Donc $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m \in F$. Ainsi $Vect(\mathcal{A}) \subset F$.

(2) $Vect(\mathcal{B})$ est un sev de E d'après (1.b) et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset Vect(\mathcal{B})$ d'après l'hypothèse et (1.a).
Donc $Vect(\mathcal{A}) \subset Vect(\mathcal{B})$ d'après (1.c). □

__Remarque__

Si F est un sev de E, alors $Vect(F) = F$. En fait, F est le plus petit sev de E qui contient F.

PROPOSITION 4 Soient F et G deux sev de E. Alors:

(1) $F \cap G$ est un sev de E

(2) $F \cup G$ n'est pas en général un sev de E. Plus précisement, $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

(3) $F \setminus G$ n'est pas un sev de E.

__Preuve__

(1) $0_E \in F \cap G$ car F, G sont deux sev de E, donc ils contiennent 0_E.
$F \cap G$ est stable pour les lois de E. En effet, soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque $u, v \in F$ et

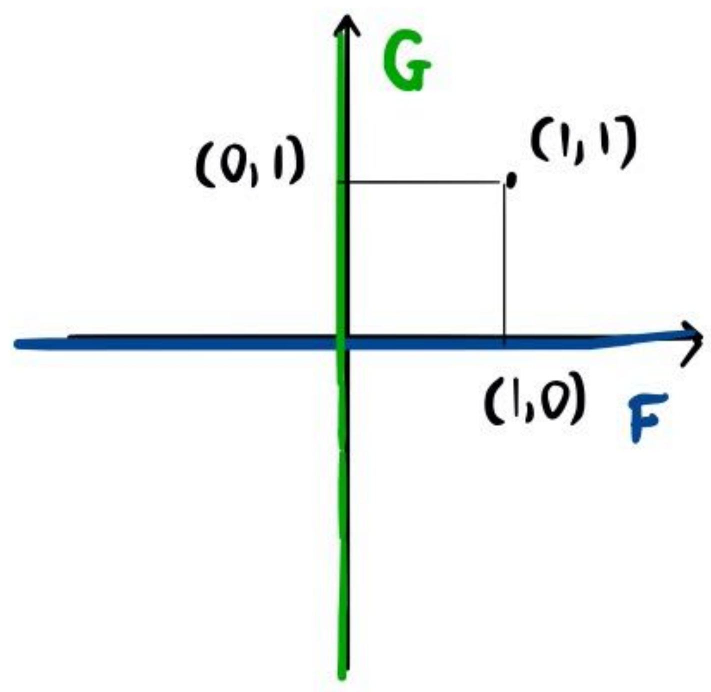
F est stable, on a $\lambda u+v\in F$; de même, $\lambda u+v\in G$. Ainsi $\lambda u+v\in F\cap G$.

(2) Le contreexemple suivant montre qu'en général $F\cup G$ n'est pas un sev de E.

$E=\mathbb{R}^2$ muni de la structure usuelle d'ev sur $\mathbb{R}$

$F=\{(x,0)\ ;\ x\in\mathbb{R}\}$, $G=\{(0,y)\ ;\ y\in\mathbb{R}\}$

F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^2$



$(1,0)\in F\subset F\cup G$
$(0,1)\in G\subset F\cup G$ mais $(1,1)=(1,0)+(0,1)\notin F\cup G$

$F\cup G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=0\}$

La propriété que pour deux sev F,G de E on a :

$F\cup G$ sev de E $\Leftrightarrow$ $F\subset G$ ou $G\subset F$

est dans le TD n°1.

(3) $F\setminus G$ n'est pas un sev car $0_E\in F$ et $0_E\in G$, d'où $0_E\notin F\setminus G$. □

La propriété que l'intersection de sev est un sev se généralise aux intersections arbitraires (même pas finies) de sev.

PROPOSITION 4' Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et $\{F_j\}_{(j\in I)}$ une famille arbitraire de sev de E. Alors $\bigcap_{j\in I} F_j$ est un sev de E.

<u>Preuve</u> Extension simple du cas de deux espaces : (1) $0_E\in F_j$ $\forall j$, d'où $0_E\in\bigcap_j F_j$; (2) $\forall u,v\in\bigcap_j F_j$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ on a $\lambda u+v\in F_j$ $\forall j$ car F_j stable. Ainsi $\lambda u+v\in\bigcap F_j$. □

§3 SOMME ET SOMME DIRECTE DE SEV

DEF 4 Soient F et G deux sev d'un ev E sur $\mathbb{K}$. La <u>somme de F et G</u>, notée $F+G$, est déf par

$$F+G=\{u\in E : \exists u_1\in F, \exists u_2\in G \text{ tels que } u=u_1+u_2\}$$

c'est-à-dire, $F+G$ est formé par tous les éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de F et un élément de G.

<u>Remarque</u>

$F\subset F+G$ et $G\subset F+G$. En fait : $\forall u\in F$ $u=\underset{\in F}{u}+\underset{\in G}{0_E}\in F+G$ et $\forall v\in G$ $v=\underset{\in F}{0_E}+\underset{\in G}{v}\in F+G$

LEMME 1

La somme $F+G$ de deux sev F et G de E est un sev de E.

<u>Preuve</u> (1) $F+G \neq \emptyset$, par exemple car $0_E \in F \subset F+G$.

(2) $F+G$ est stable pour les lois de E, car $\forall u,v \in F+G, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on trouve $u_1, v_1 \in F$, $u_2, v_2 \in G$ tels que $u = u_1+u_2$, $v = v_1+v_2$. D'où $\lambda u+v = \lambda(u_1+u_2)+(v_1+v_2) = \underbrace{(\lambda u_1+v_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda u_2+v_2)}_{\in G} \in F+G$. □

EXEMPLE

$E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 ;\ x,y \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y,z \in \mathbb{R}\}$. F et G sont sev de E.

$F+G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \exists\, x_1, y_1, y_2, z_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = (x_1,y_1,0)+(0,y_2,z_2)\} = \mathbb{R}^3$

En fait, $F+G \subset \mathbb{R}^3$ par définition et, réciproquement, tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : notamment $(x,y,z) = \underset{\in F}{(x,y,0)} + \underset{\in G}{(0,0,z)}$.

Remarquons toutefois que cette représentation n'est pas unique, car on peut aussi écrire $(x,y,z) = \underset{\in F}{(x,0,0)} + \underset{\in G}{(0,y,z)}$, et les deux écriture sont différentes (càd $(x,y,0) \neq (x,0,0)$ et $(0,0,z) \neq (0,y,z)$) si $y \neq 0$. A remarquer : $F \cap G = \{(0,y,0) \ ;\ y \in \mathbb{R}\}$. La non-unicité de l'écriture en somme d'un élément de F et d'un élément de G est liée au fait qu'on a $F \cap G \neq \{0_E\}$, comme on va le remarquer tout de suite.

<u>Remarque</u> Si $u \in F$, $v \in G$ et $w \in F \cap G$, alors $\underset{\in F}{u} + \underset{\in G}{v} = \underbrace{(u+w)}_{\in F} + \underbrace{(v-w)}_{\in G}$

DEF 5 Soit H un sev d'un ev E sur $\mathbb{K}$. On dit que <u>H est la somme directe</u> de deux sev F et G de E, écrit $H = F \oplus G$, lorsque tout élément de H s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

<u>Remarque</u> Si $H = F \oplus G$, alors par déf $H = F+G$. La réciproque n'est pas vrai : la condition afin que la somme soit directe est que $F \cap G = \{0_E\}$, comme on le montre dans la propriété suivante.

PROPOSITION 5 Dans la notation précédente, $H = F \oplus G$ si et seulement si $\begin{cases} H = F+G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$

<u>Preuve</u>

$\Rightarrow$: Si $H = F \oplus G$, alors par définition $H = F+G$. Si $u \in F \cap G$, alors $u = \overset{\in F}{u} + \overset{\in G}{0_E}$ et aussi $u = \overset{\in F}{0_E} + \overset{\in G}{u}$

L'unicité de la représentation de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G entraîne l'égalité des composantes dans F et dans G, c'est-à-dire que $u = 0_E$. Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$ (puisque $0_E \in F \cap G$ est toujours vrai car F, G sev de E).

$\Leftarrow$: Supposons que $u = \underset{\in F}{u_1} + \underset{\in G}{v_1} = \underset{\in F}{u_2} + \underset{G}{v_2}$ sont deux représentations de $u \in H$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Alors $u_1+u_2 = v_1+v_2$ donne $\overbrace{u_1-v_1}^{\in F} = \overbrace{v_2-u_2}^{\in G} \in F \cap G = \{0_E\}$, d'où $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, c'est-à-dire la représentation est bien unique. □

<u>Remarque</u> On dit aussi que <u>F et G sont en somme directe</u> pour indiquer que la somme $F+G$ est

directe, càd que $F \cap G = \{0_E\}$.

DEF 6 On dit que deux sev F et G de l'ev E sur $\mathbb{K}$ sont <u>supplémentaires dans E</u> (ou que <u>F est un supplémentaire de G dans E</u>, ou que <u>G est un supplémentaire de F dans E</u>) lorsque $E = F \oplus G$.

Les définitions de somme et de somme directe de sev s'étendent aisément à un nombre fini de sev d'un ev donné.

DEF 7 Soient E un sev sur $\mathbb{K}$ et $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. La somme de $F_1, \dots, F_m$, notée $F_1 + \dots + F_m$ (ou $\sum_{j=1}^{m} F_j$) est déf par

$$F_1 + \dots + F_m = \{u \in E : \exists u_1 \in F_1, \dots, u_m \in F_m \text{ tels que } u = u_1 + \dots + u_m\}$$

(donc $F_1 + \dots + F_m$ est formé par tous les éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'éléments de $F_1, \dots, F_m$)

LEMME 2 Dans la notation ci-dessus, $F_1 + \dots + F_m$ est un sev de E

<u>Preuve</u> semblable à celle du lemme 1. Remarquer que $0_E \in F_j \subset F_1 + \dots + F_m$ pour tout $j = 1, \dots, m$. □

DEF 8 Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et H un sev de E. Soient $F_1, \dots, F_m$ sev de E. On dit que H est la somme directe de $F_1, \dots, F_m$, écrit $H = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m$ (ou $H = \bigoplus_{j=1}^{m} F_j$), si tout $u \in H$ s'écrit de façon unique comme somme $u = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ avec $u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2, \dots, u_m \in F_m$.

<u>Remarques</u>

(1) On dit aussi que les sev $F_1, \dots, F_m$ de E <u>sont en somme directe</u> pour indiquer que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ est directe, c'est-à-dire que tout $u \in F_1 + F_2 + \dots + F_m$ possède une écriture unique comme $u = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ avec $u_j \in F_j$ pour tous $j = 1, \dots, m$. Donc, dans ce cas, $F_1 + F_2 + \dots + F_m = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m$.

(2) La condition $\bigcap_{j=1}^{m} F_j = \{0_E\}$ <u>NE GARANTIE PAS</u> que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ est directe <u>POUR $m > 2$</u>.

EXEMPLE

$E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$, $F_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \mathbb{R}\}$, $F_3 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$

On a $E = F_1 + F_2 + F_3$, car tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ peut être écrit comme $(x,y) = \underbrace{(x,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,y)}_{\in F_2} + \underbrace{(0,0)}_{\in F_3}$. La somme n'est pas directe, car cette représentation n'est pas unique : par ex,

$(x,y) = \underbrace{(0,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,y-x)}_{\in F_2} + \underbrace{(x,x)}_{\in F_3}$. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est donc pas directe, même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{(0,0)\}$.