Exercice 10

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel réel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = 1$ (la fonction constante) sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}$.
2. Soient n un nombre entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts. Pour $j = 1, \ldots, n$ on note $f_j(x) = e^{a_j x}$. Montrer que $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}$.
3. Est-ce que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie ?

1. On montre que l'unique comb. linéaire $\lambda f + \mu g + \nu h = 0_{\mathcal{F}}$ (où $0_{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction nulle, déf $0_{\mathcal{F}}(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) est celle pour laquelle $\lambda = \mu = \nu = 0$.

L'égalité $\lambda f + \mu g + \nu h = 0_{\mathcal{F}}$ est dans $\mathcal{F}$, càd

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\lambda f + \mu g + \nu h)(x) = 0_{\mathcal{F}}(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x) + \mu g(x) + \nu h(x) = 0$$

Si on choisit

	$\sin x$	$\cos x$
$x = 0$	0	1
$x = \frac{\pi}{2}$	1	0
$x = \pi$	0	-1

on obtient

$$\begin{cases} \quad \mu + \nu = 0 \\ \lambda \quad + \nu = 0 \\ -\mu + \nu = 0 \end{cases}, \text{ d'où } \lambda = \mu = \nu = 0$$

Ainsi f, g, h sont bien l.i.

2. On considère $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}}$; on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ est l'unique solution.

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}}$ est une égalité de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Si on dérive cette égalité $n-1$ fois et on utilise $0_{\mathcal{F}}' = 0_{\mathcal{F}}$ et que $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \ldots + \lambda_n f_n'$, alors on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0_{\mathcal{F}} \\ \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \ldots + \lambda_n f_n' = 0_{\mathcal{F}} \\ \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2'' + \ldots + \lambda_n f_n'' = 0_{\mathcal{F}} \\ \vdots \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)} + \lambda_2 f_2^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n f_n^{(n-1)} = 0_{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Puisque $f_j(x) = e^{a_j x}$ on a $f_j'(x) = a_j e^{a_j x}$, $f_j''(x) = a_j^2 e^{a_j x}, \ldots, f_j^{(n-1)}(x) = a_j^{n-1} e^{a_j x}$

On remplace dans le système : on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_m e^{a_m x} = 0 \\ \lambda_1 a_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_m a_m e^{a_m x} = 0 \\ \lambda_1 a_1^2 e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2^2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_m a_m^2 e^{a_n x} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_1^{m-1} e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2^{m-1} e^{a_2 x} + \dots + \lambda_m a_m^{m-1} e^{a_m x} = 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour $x=0$ on obtient le système de m équations linéaires en $\lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_m\lambda_m = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \dots + a_m^2\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ a_1^{m-1}\lambda_1 + a_2^{m-1}\lambda_2 + \dots + a_m^{m-1}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

$\boxed{m=2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - a_1 L_1]{} \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = 0 \\ \boxed{(a_2-a_1)\lambda_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|cc} L_2 : & a_1 & a_2 \\ -a_1 L_1 : & -a_1 & -a_1 \\ \hline & 0 & a_2 - a_1 \end{array}$$

$\neq 0$ car $a_2 \neq a_1$

système linéaire homog. de 2 équations en 2 variables : 2 pivots

$\Rightarrow$ solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\boxed{m=3}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + a_3^2\lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - a_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a_1 L_2}]{} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ (a_2-a_1)\lambda_2 + (a_3-a_1)\lambda_3 = 0 \\ a_2(a_2-a_1)\lambda_2 + a_3(a_3-a_1)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|ccc} L_3 : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ -a_1 L_2 : & -a_1^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ \hline & 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) \end{array}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - a_2 L_2]{} \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \dots = 0 \\ \boxed{(a_2-a_1)\lambda_2} + \dots = 0 \\ \boxed{(a_3-a_2)(a_3-a_1)\lambda_3} = 0 \end{cases}$$

$\neq 0$ $\qquad$ $\neq 0$

car a_1, a_2, a_3 deux-à-deux distincts

système linéaire homog. de 3 éq. en 3 variables : 3 pivots

$\Rightarrow$ solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

n général

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n = 0 \\ a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \dots + a_n^2\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-1}\lambda_1 + a_2^{n-1}\lambda_2 + \dots + a_n^{n-1}\lambda_n = 0 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - a_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a_1 L_2 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - a_1 L_{n-1}}]{} \left\{\begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ (a_2-a_1)\lambda_2 + \dots + (a_n-a_1)\lambda_n = 0 \\ a_2(a_2-a_1)\lambda_2 + \dots + a_n(a_n-a_1)\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1)\lambda_2 + \dots + a_n^{n-2}(a_n-a_1)\lambda_n = 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - a_2 L_2 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - a_2 L_{n-1}}]{} \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots = 0 \\ (a_2-a_1)\lambda_2 + (a_3-a_1)\lambda_3 + \dots = 0 \\ (a_3-a_2)(a_3-a_1)\lambda_3 + \dots + (a_n-a_2)(a_n-a_1)\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_3^{n-3}(a_3-a_2)(a_3-a_1)\lambda_3 + \dots + a_n^{n-3}(a_n-a_2)(a_3-a_1)\lambda_n = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcccc} L_3: & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ -a_2L_2: & -a_2(a_2-a_1) & -a_2(a_3-a_1) & \cdots & -a_2(a_n-a_1) \\ \hline & 0 & (a_3-a_2)(a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_2)(a_n-a_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} L_n: & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \\ -a_2L_{n-1}: & -a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_2a_3^{n-3}(a_3-a_1) & \cdots & a_2a_n^{n-3}(a_n-a_1) \\ \hline & 0 & a_3^{n-3}(a_3-a_2)(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-3}(a_n-a_2)(a_n-a_1) \end{array}$$

On itère et on trouve:

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\lambda_1} + \dots = 0 \\ \underset{\neq 0}{\boxed{(a_2-a_1)\lambda_2}} + \dots = 0 \\ \underset{\neq 0}{\boxed{(a_3-a_2)(a_3-a_1)\lambda_3}} + \dots = 0 \\ \vdots \\ \underset{\neq 0}{\boxed{(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots(a_n-a_2)(a_n-a_1)}}\lambda_n = 0 \end{array}\right.$$

car les $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux-à-deux distincts

système homogène, n équations, n inconnues

n pivots $\Rightarrow$ solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

Conclusion: $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre.

3. $\mathcal{F}$ est-de dimension finie ? Non

Si $\mathcal{F}$ était de dimension finie, alors on pourrait trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$. Soit $N = \text{card}(\mathcal{B})$ (càd $\dim \mathcal{F}$). Toute famille libre de $\mathcal{F}$ devrait donc cardinal $\leq N$. Or, dans la question 2. on a montré que $\forall n$ la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}$, d'où une contradiction si $n > N$.

Conclusion: $\mathcal{F}$ est de dimension infinie.