**Exercice 11** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $E$. Considérons les vecteurs $u = -e_1 + e_3$ ,$v = e_1 + e_2 - e_3$ ,$w = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $a = 2e_1 + e_2 - e_4$ et $b = e_1 + e_3 + e_4$ et les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ engendrés respectivement par $(u, v, w)$ et $(a, b)$.

1. Déterminer une base et la dimension de $F$ puis de $G$. Écrire la formule de Grassmann et en déduire que $F$ et $G$ ne sont pas en somme directe.
2. Déterminer une base et la dimension de $F + G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.
3. Trouver un système d'équations de $F$ et de $G$, puis en déduire un système d'équations de $F \cap G$ et une base de $F \cap G$.
4. Compléter la base de $F \cap G$ obtenue à la question précédente par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de $E$. En déduire un supplémentaire de $F \cap G$ dans $E$.

1. • $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$. La famille $\mathcal{B}_F = \{u, v, w\}$ est génératrice de $F$. En outre, $\mathcal{B}_F$ est libre : si $\lambda u + \mu v + \nu w = 0_E$, alors $\lambda = \mu = \nu = 0$. En effet :

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0_E \iff \lambda(-e_1 + e_3) + \mu(e_1 + e_2 - e_3) + \nu(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 0_E$$
$$\iff (-\lambda + \mu + \nu)e_1 + (\mu + \nu)e_2 + (\lambda - \mu + \nu)e_3 + \nu e_4 = 0_E$$
$$\iff \begin{cases} -\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$

car $\mathcal{B}$ est une base, donc libre, d'où l'unique comb. linéaire de $e_1, e_2, e_3, e_4$ égale à $0_E$ est celle où tous les coeff sont 0

$$\begin{cases} -\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu + \nu = 0 \rightarrow \mu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}, \text{ d'où } \lambda = \mu = \nu = 0$$

Donc $\mathcal{B}_F$ est une base de $F$ et $\dim F = \mathrm{card}(\mathcal{B}_F) = 3$

• $G = \mathrm{Vect}(a, b)$. La famille $\mathcal{B}_G = \{a, b\}$ est par définition génératrice de $G$. Elle est libre car formée par deux vecteurs non colinéaires ($\mathcal{B}$ est une base et $a$ a coordonnée de $e_2$ différente de 0 ; $b$ a coordonnée de $e_2$ égale à 0). Donc $\mathcal{B}_G$ est une base de $G$ et $\dim G = \mathrm{card}(\mathcal{B}_G) = 2$.

La formule de Grassmann pour $F$ et $G$ est

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - \dim(F \cap G) = 5 - \dim(F \cap G).$$

Puisque $F+G$ est un sev de $E$, on a $\dim(F+G) \leq 4$. Ainsi

$$5 - \dim(F \cap G) = \dim(F+G) \leq 4 \text{ entraine } \dim(F \cap G) \geq 5 - 4 = 1$$

Ainsi $F \cap G \neq \{0_E\}$ (car $\dim(\{0_E\}) = 0$) et donc $F$ et $G$ ne sont pas en somme directe.

2. $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de $F+G$ (car tout élément $u \in F+G$ est de la forme $u = u_F + u_G$ où $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Si on écrit $u_F$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_F$ et $u_G$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_G$, alors $u = u_F + u_G$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$). Clairement, $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ ne peut pas être libre, car son cardinal est $5 \geqslant \dim E \geqslant \dim(F+G)$.

On peut toutefois extraire de $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ une base de $F+G$. En fait, une sous-famille libre maximale de $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ sera une base de $F+G$. (voir la preuve du théorème 1 du ch. 2). Pour déterminer une sous-famille libre maximale de $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ : on étudie les solutions de

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w + \lambda_4 a + \lambda_5 b = 0_E, \qquad (*)$$

càd : $\lambda_1(-e_1+e_3) + \lambda_2(e_1+e_2-e_3) + \lambda_3(e_1+e_2+e_3-e_4) + \lambda_4(2e_1+e_2-e_4) + \lambda_5(e_1+e_3+e_4) = 0_E$

$$\Leftrightarrow (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+\lambda_5)e_1 + (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)e_2 + (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5)e_3 + (-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5)e_4 = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4+\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5 = 0 \\ -\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5 = 0 \end{cases}$$

because $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de $E$ donc libre.

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow (L_1+L_3)/2]{L_1 \leftarrow L_3} \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 = 0 \\ -\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5 = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_4 \leftarrow \frac{L_4+L_3}{2}]{} \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_5 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 = 0 \\ \lambda_5 = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Les vecteurs qui correspondent aux variables avec les pivots, càd $u, v, w, b$, forment sous-famille libre maximale. Remarquer que le fait que $\{u, v, w, b\}$ est libre on peut le voir du même système avec $\lambda_4 = 0$ (càd sans $a$ dans $(*)$), qui a alors solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Puisque $\{u, v, w, a, b\}$ n'est pas libre, $\{u, v, w, b\}$ est libre maximale.

Puisque $\mathrm{card}\{u, v, w, b\} = 4$, on conclut que $\dim(F+G) = 4$ et donc $F+G = E$.

Une base de $F+G=E$ est $\{u,v,w,b\}$, une deuxième est $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

De la formule de Grassmann on déduit que

$$\dim(F\cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 3+2-4=1$$

REM : Le système (S) peut être utilisé pour écrire a comme combinaison linéaire de $\{u,v,w,b\}$. En effet, si on le résout, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1=\lambda_4 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=-\lambda_4 \\ \lambda_5=0 \end{cases}$$

On substitue dans $(*)$ et on obtient, pour tous $\lambda_4\in\mathbb{R}$

$\lambda_4 u+0\cdot v-\lambda_4 w+\lambda_4 a+0\cdot b=0_E$, càd $\lambda_4(u-w+a)=0_E$. Si on choisit $\lambda_4=1$, on en déduit $a=-u+w$, comme l'on peut vérifier.

3. <u>Système d'équations pour F</u> :

on cherche les conditions afin que $h= xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ soit dans $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$

càd afin que il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $h=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w$. Explicitement :

$$\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w = xe_1+ye_2+ze_3+te_4$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1(-e_1+e_3)+\lambda_2(e_1+e_2-e_3)+\lambda_3(e_1+e_2+e_3-e_4)=x_1e_1+ye_2+ze_3+te_4$$

$$\Leftrightarrow (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_1+(\lambda_2+\lambda_3)e_2+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)e_3-\lambda_3 e_4 = xe_1+ye_2+ze_3+te_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = x \\ \lambda_2+\lambda_3=y \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=z \\ -\lambda_3=t \end{cases}$$

d'après l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$

$$\xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow L_3 \\ L_3\leftarrow -L_4 \\ L_4\leftarrow (L_3+L_1)/2}]{} \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=z \\ \lambda_2+\lambda_3=y \\ \lambda_3=-t \\ \lambda_3=\dfrac{x+z}{2} \end{cases} \xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_3]{} \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=z \\ \lambda_2+\lambda_3=y \\ \lambda_3=-t \\ \boxed{0=\dfrac{x+z}{2}+t} \end{cases}$$

Les trois premières équations, qui contiennent les pivots, permettent de déterminer une solution $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, à condition que le système soit compatible, càd que $(x,y,z,t)$ satisfait la dernière équation $0=\dfrac{x+z}{2}+t$, càd $x+z+2t=0$, qui est l'équation que $xe_1+ye_2+ze_3+te_4$ doit satisfaire afin qu'il soit dans F, càd c'est l'équation définissant F.

$\dim(F\cap G)=1$, càd $F\cap G$ est une droite vectorielle. Par conséquent, $F\cap G=\mathrm{Vect}(a)$ et $\{a\}$ est une base de $F\cap G$.

4. Puisque $\dim(F\cap G)=1$ et $\dim E=4$, il faut choisir 3 ($=\dim E-\dim(F\cap G)$) éléments de $\mathcal{B}$ qui complètent $\{a\}$ en une base de $E$. Puisque $a=2e_1+e_2-e_4 \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_4)$, tout choix de 3 vecteurs dans $\mathcal{B}$ différent de $\{e_1,e_2,e_4\}$ donnera une base de $E$. Par exemple, on peut choisir $e_1,e_2,e_3$ : il faut montrer que $\{a,e_1,e_2,e_3\}$ est libre. Or, si $\lambda_0 a+\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0_E$, alors

$\lambda_0(2e_1+e_2-e_4)+\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=(2\lambda_0+\lambda_1)e_1+(\lambda_0+\lambda_2)e_2+\lambda_3 e_3-\lambda_0 e_4=0_E$

d'où (puisque $\mathcal{B}$ est libre) $\begin{cases} 2\lambda_0+\lambda_1 = 0 \\ \lambda_0+\lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \\ -\lambda_0 \end{cases}$, qui entraîne $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Toute famille libre de 4 éléments de $E$ est une base de $E$, d'où $\{a,e_1,e_2,e_3\}$ est bien une base de $E$. Un supplémentaire de $F\cap G=\mathrm{Vect}\{a\}$ dans $E$ est donc $\mathrm{Vect}\{e_1,e_2,e_3\}$.