Exercice 12

On note $\mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes en x à coefficients réels et de degré ≤ 3. Soit $E = \mathrm{Vect}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$ engendré par

$$p_1(x) = x + x^2, \quad p_2(x) = 1 + x^2 + x^3, \quad p_3(x) = 1 - x + x^3, \quad p_4(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3.$$

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[x]$.

On pose $\mathcal{F} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ et on cherche une sous-famille libre maximale de $\mathcal{F}$.

On considère $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$ $\quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R})$ $\quad (*)$

$\Leftrightarrow \lambda_1(x + x^2) + \lambda_2(1 + x^2 + x^3) + \lambda_3(1 - x + x^3) + \lambda_4(1 + 2x + 3x^2 + x^3) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$

$\Leftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)1 + (\lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4)x + (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_4)x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0} \\ \lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

car $\{1, x, x^2, x^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$, donc libre

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \cancel{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 - 2\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}$$

On remplace $\lambda_1 = \lambda_3 - 2\lambda_4$, $\lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4$ dans $(*)$ et on obtient

$$(\lambda_3 - 2\lambda_4)p_1 + (-\lambda_3 - \lambda_4)p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$$

$\Leftrightarrow \lambda_3(p_1 - p_2 + p_3) + \lambda_4(-2p_1 - p_2 + p_4) = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$ $\quad (\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 + p_3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\ -2p_1 - p_2 + p_4 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_3 = -p_1 + p_2 \in \mathrm{Vect}\{p_1, p_2\} \\ p_4 = 2p_1 + p_2 \in \mathrm{Vect}\{p_1, p_2\} \end{cases}$$

d'où $E = \mathrm{Vect}\{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subset \mathrm{Vect}\{p_1, p_2\}$, d'où $E = \mathrm{Vect}\{p_1, p_2\}$

$\{p_1, p_2\}$ est libre : $\begin{cases} \text{MÉTHODE 1 : le système ci-dessus avec } \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \text{ donne } \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \text{MÉTHODE 2 : } p_1, p_2 \text{ ne sont pas colinéaires} \end{cases}$

Ainsi $\{p_1, p_2\}$ est une base de E ; $\dim E = \mathrm{card}\{p_1, p_2\} = 2$

2. On complète $\{p_1, p_2\}$ en une base de $\mathbb{R}_3[x]$. Puisque $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$, il faut choisir deux polynômes $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ tels que $\{p_1, p_2, q_1, q_2\} =: \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

On choisit $q_1(x)=1$ et $q_2(x)=x$. On montre que $\mathcal{B}=\{p_1,p_2,q_1,q_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

- METHODE 1 : $\mathcal{B}$ est libre, càd l'égalité $\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2+\lambda_3 q_1+\lambda_4 q_2 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$ possède solution unique $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

Or, l'égalité $\iff \lambda_1(x+x^2)+\lambda_2(1+x^2+x^3)+\lambda_3+\lambda_4 x = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$

$\iff (\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_4)x+(\lambda_1+\lambda_2)x^2+\lambda_2 x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]}$

$$\underset{\{1,x,x^2,x^3\}\text{ libre}}{\iff} \begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 = 0 & \to \lambda_3=0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 & \to \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 & \to \lambda_1=0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

, d'où $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ solution unique

- METHODE 2 : $\mathcal{B}$ est génératrice. Il suffit de montrer que $1,x,x^2,x^3 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

En effet :

$1=q_1(x)$; $x=q_2(x)$; $x^2=p_1(x)-q_2(x)$; $x^3=p_2(x)-q_1(x)-p_1(x)+q_2(x)$

D'où $\mathbb{R}_3[x]=\mathrm{Vect}(1,x,x^2,x^3)\subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})\subset \mathbb{R}_3[x]$, càd $\mathbb{R}_3[x]=\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$

- Puisque $\mathrm{card}(\mathcal{B})=4=\dim \mathbb{R}_4[x]$, $\mathcal{B}$ est donc une base

On pose $F=\mathrm{Vect}\{q_1,q_2\}$. Alors $E\oplus F=\mathbb{R}_3[x]$, car $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

En effet : $\forall p\in\mathbb{R}_3[x]$, $\exists$ unique $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_3$ tels que

$$p=\underbrace{(\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2)}_{=u_E\in E}+\underbrace{(\lambda_3 q_1+\lambda_4 q_2)}_{u_F\in F} \quad , \text{ d'où } \mathbb{R}_3[x]=E+F$$

Cette représentation est unique car $\lambda_1,\dots,\lambda_4$ sont uniques :

Si $p=p_E+p_F$ avec $p_E\in E$ et $p_F\in F$, alors $\exists\, \mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$, $\mu_3,\mu_4\in\mathbb{R}$ tels que $p_E=\mu_1 p_1+\mu_2 p_2$, $p_F=\mu_3 q_1+\mu_4 q_2$. Donc $p=\mu_1 p_1+\mu_2 p_2+\mu_3 q_1+\mu_4 q_2$. L'unicité de la représentation dans la base $\mathcal{B}$ donne $\lambda_j=\mu_j$ $\forall j=1,2,3,4$

D'où $u_E=p_E$, $u_F=p_F$. Ainsi $\mathbb{R}_3[x]=E\oplus F$ car la somme de E et F est directe.