Exercice 13 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

et soit G défini par

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

On rappelle que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ si et seulement si $\dim F + \dim G = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{=4}$ et $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ (x_1, -2x_1, x_1, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1, x_4 \in \mathbb{R} \} \quad (*)$$

$$= \{ x_1(1,-2,1,0) + x_4(0,0,0,1) ; x_1, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$= \mathrm{Vect}(u_1, e_4)$, où $u_1 = (1,-2,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$

$\{u_1, e_4\}$ est génératrice de F ; elle est libre, car famille de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\{u_1, e_4\}$ est une base de F et $\dim F = \mathrm{card}\{u_1, e_4\} = 2$

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ (x_1, -x_4, -x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1, x_4 \in \mathbb{R} \} \quad (**)$$

$$= \{ x_1(1,0,0,0) + x_4(0,-1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 ; x_1, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$= \mathrm{Vect}(e_1, u_2)$ où $e_1 = (1,0,0,0)$ et $u_2 = (0,-1,-1,1)$

$\{e_1, u_2\}$ est une famille génératrice de G et est libre car formée par deux vecteurs non colinéaires. Donc $\{e_1, u_2\}$ est une base de G et $\dim G = 2$

D'après $(*)$ et $(**)$, $F \cap G = \{ (x_1, -2x_1, x_1, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; -2x_1 = -x_4, x_1 = -x_4 \}$

$$= \{ (x_1, -2x_1, x_1, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 = x_4 = 0 \} = \{(0,0,0,0)\}$$

Ainsi $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, d'où $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.