Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension 5 de base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soit α un nombre réel. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_3 + e_5, -e_1 + e_2 + 4e_3 + 5e_4)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2 - 5e_3 + 2e_4 + 4e_5, 2e_1 + e_2 - 16e_3 - e_4 + \alpha e_5)$. Sont-ils supplémentaires ? Leur somme est-elle directe ?

On note $u = e_1 - 2e_3 + e_5$, $\quad v = -e_1 + e_2 + 4e_3 + 5e_4$

$w = e_2 - 5e_3 + 2e_4 + 4e_5$ $\quad t = 2e_1 + e_2 - 16e_3 - e_4 + \alpha e_5$

d'où $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w, t)$.

On peut conclure directement que F et G ne sont pas supplémentaires dans E

car $\dim F \leqslant \mathrm{card}\{u, v\} = 2$ (car $\{u, v\}$ est génératrice de F)

$\dim G \leqslant \mathrm{card}\{w, t\} = 2$ (car $\{w, t\}$ — " — de G)

d'où (d'après la formule de Grassmann)

$$\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G = 2 + 2 < 5 = \dim E,$$

ce qui implique que $F + G \neq E$.

La somme de F et G est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$

Un élément de $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ est de la forme $\lambda u + \mu v$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Un élément de $G = \mathrm{Vect}(w, t)$ est de la forme $\nu w + \zeta t$ pour $\nu, \zeta \in \mathbb{R}$.

Si $e \in F \cap G$, alors $\exists \lambda, \mu, \nu, \zeta$ tels que $\lambda u + \mu v = e = \nu w + \zeta t$. On résout

$\lambda u + \mu v = \nu w + \zeta t$ pour $\lambda, \mu, \nu, \zeta \in \mathbb{R}$.

$\lambda u + \mu v = \nu w + \zeta t \Leftrightarrow$

$$\lambda(e_1 - 2e_3 + e_5) + \mu(-e_1 + e_2 + 4e_3 + 5e_4) - \nu(e_2 - 5e_3 + 2e_4 + 4e_5) - \zeta(2e_1 + e_2 - 16e_3 - e_4 + \alpha e_5) = 0_E$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \mu - 2\zeta)e_1 + (\mu - \nu - \zeta)e_2 + (-2\lambda + 4\mu + 5\nu + 16\zeta)e_3 + (5\mu - 2\nu + \zeta)e_4 + (\lambda - 4\nu - \alpha\zeta)e_5 = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda - \mu - 2\zeta = 0 \\ \mu - \nu - \zeta = 0 \\ -2\lambda + 4\mu + 5\nu + 16\zeta = 0 \\ 5\mu - 2\nu + \zeta = 0 \\ \lambda - 4\nu - \alpha\zeta = 0 \end{array}\right. \xrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \left\{\begin{array}{l} \lambda - \mu - 2\zeta = 0 \\ \mu - \nu - \zeta = 0 \\ 2\mu + 5\nu + 12\zeta = 0 \\ 5\mu - 2\nu + \zeta = 0 \\ \mu - 4\nu + (2-\alpha)\zeta = 0 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{L_4 \leftarrow (L_4 - 5L_2)/3 \\ L_5 \leftarrow (L_5 - L_2)/3}]{L_3 \leftarrow (L_3 - 2L_2)/7} \left\{\begin{array}{l} \lambda \;\text{-----}\; = 0 \\ \mu - \nu - \zeta = 0 \\ \nu + 2\zeta = 0 \\ \cancel{\nu + 2\zeta = 0} \\ \nu + \frac{\alpha - 3}{3}\zeta = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lrrrr} L_3 : & -2 & 4 & 5 & 16 \\ -2L_1 : & 2 & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 0 & 2 & 5 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrrr} L_5 : & 1 & 0 & -4 & -\alpha \\ -L_1 : & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & -4 & 2-\alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} L_3 : & 2 & 5 & 12 \\ -2L_2 : & -2 & 2 & 2 \\ \hline & 0 & 7 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrr} L_4 : & 5 & -2 & 1 \\ -5L_2 : & -5 & 5 & 5 \\ \hline & 0 & 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{lrrr} L_5 & 1 & -4 & 2-\alpha \\ -L_2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & -3 & 3-\alpha \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda - \mu \quad - 2\xi = 0 \\ \mu - \nu - \xi = 0 \\ \nu + 2\xi = 0 \\ \cancel{\nu + 2\xi = 0} \\ \nu + \frac{\alpha - 3}{3}\xi = 0 \end{cases}$$

Ce système possède solution unique $\lambda = \mu = \nu = \xi = 0$ si et seulement si $\frac{\alpha-3}{3} \neq 2$, càd $\alpha \neq 9$

La somme de F et G est donc directe pour tout $\alpha \neq 9$.