Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Les familles de vecteurs suivantes de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.

1. $(e_1 + e_2 + e_3 \ , \ -e_1 + e_2 + e_3)$,
2. $(e_1 - e_3 \ , \ -e_1 + e_2 \ , \ -e_2 + e_3)$,
3. $(e_1 + e_2 + e_3 \ , \ 2e_1 - e_2 + 2e_3 \ , \ e_1 - 2e_2 - e_3)$.

On note $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ les familles des questions 1,2,3, respectivement.

$\boxed{\mathcal{F}_1}$

$\mathcal{F}_1$ est une famille de deux vecteurs dans E et $\dim E = 3$. Donc $\mathcal{F}_1$ ne peut pas être génératrice, donc elle n'est pas une base de E. Elle est libre : si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1(e_1+e_2+e_3) + \lambda_2(-e_1+e_2+e_3) = 0_E$, alors $(\lambda_1 - \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0_E$. Puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base, donc libre, l'unique combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 égale à 0_E est celle pour laquelle tous les coeffs sont 0, d'où

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

, ce qui entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Puisque $\mathcal{F}_1$ est libre, elle est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$. Le rang de $\mathcal{F}_1$ (qui par définition est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$) est donc 2.

Pour compléter $\mathcal{F}_1$ en une base de E, il suffit de choisir un élément $u \in E$ tel que $\mathcal{F}_1 \cup \{u\}$ soit libre (ou génératrice). On peut par exemple choisir u dans $\mathcal{B}$ [on ne peut pas choisir e_1 car $e_1+e_2+e_3 - (-e_1+e_2+e_3) = 2e_1$], par exemple $u = e_2$. On montre que $\mathcal{F}_1 \cup \{e_2\}$ est libre : si $\lambda_1(e_1+e_2+e_3) + \lambda_2(e_1+e_2-e_3) + \lambda_3 e_2 = 0$, alors $(\lambda_1+\lambda_2)e_1 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_2 + (\lambda_1-\lambda_3)e_3 = 0_E$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, donc libre, ceci entraîne

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

, càd $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\mathcal{F}_1 \cup \{e_2\}$ est libre et de cardinal égal à $\dim E = 3$, d'où $\mathcal{F}_1 \cup \{e_2\}$ est une base de E

$\boxed{\mathcal{F}_2}$ METHODE 1 : Si on remarque que $\overbrace{(e_1-e_3)}^{u_1}+\overbrace{(-e_1+e_2)}^{u_2}+\overbrace{(-e_2+e_3)}^{u_3}=0_E$, on peut tout de suite conclure que $\mathcal{F}_2$ est liée. D'autre part, n'importe quels deux éléments de $\mathcal{F}_2$ forment une famille libre, car ils ne sont pas colinéaires (= multiples l'un de l'autre) car par exemple, $\lambda(e_1-e_3)=-e_1+e_2$ entraînerait $(\lambda+1)e_1-e_2-\lambda e_3=0_E$, d'où $e_2=(\lambda+1)e_1-\lambda e_3\in \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$, ce qui est impossible car $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base, donc libre. Par conséquent, $u_3=-u_1-u_2\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et donc $u_1,u_2,u_3\in\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Un sev qui contient u_1,u_2,u_3 contient aussi les comb. linéaires de u_1,u_2,u_3. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)\subset \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. L'inclusion opposée est clairement vraie, car $(u_1,u_2)\subset\mathcal{F}_2$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, avec $\{u_1,u_2\}$ libre, d'où $\dim\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)=\dim\mathrm{Vect}(u_1,u_2)=2$, càd le rang de $\mathcal{F}_2$ est 2.

METHODE 2 : on peut déterminer une sous-famille libre maximale de $\mathcal{F}_2=\{u_1,u_2,u_3\}$, où $u_1=e_1-e_3$, $u_2=-e_1+e_2$, $u_3=-e_2+e_3$. A ce but on étudie les solutions $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ de l'équation vectorielle $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_E$, càd

$\lambda_1(e_1-e_3)+\lambda_2(-e_1+e_2)+\lambda_3(-e_2+e_3)=0_E$, càd $(\lambda_1-\lambda_2)e_1+(\lambda_2-\lambda_3)e_2+(-\lambda_1+\lambda_3)e_3=0_E$

Puisque $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ est une base, donc libre, on doit avoir $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=0\\ \lambda_2-\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}$, càd $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$. On retrouve donc l'égalité $u_1+u_2+u_3=0_E$ de la méthode 1. Comme avant, on peut conclure que, par exemple, $\{u_1,u_2\}$ est une sous-famille libre maximale de $\mathcal{F}_2$.

Pour compléter $\{u_1,u_2\}$ en une base de E, on peut choisir l'un (n'importe quel) des éléments de $\mathcal{B}$. Supposons par exemple d'avoir choisi e_1. On montre que $\{u_1,u_2,e_1\}$ est libre, et donc une base de E, car $\mathrm{card}\{u_1,u_2,e_1\}=3=\dim E$.

Supposons que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3e_1=0$, càd $\lambda_1(e_1-e_3)+\lambda_2(-e_1+e_2)+\lambda_3e_1=0$. Donc $(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)e_1+\lambda_2e_2-\lambda_1e_3=0$. Puisque $\mathcal{B}$ est libre, on conclut $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2=0\\ -\lambda_1=0\end{cases}$, ainsi $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

$\boxed{\mathcal{F}_3}$ On pose $v_1 = e_1+e_2+e_3$, $v_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, $v_3 = e_1 - 2e_2 - e_3$, d'où $\mathcal{F}_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$

On vérifie si $\mathcal{F}_3$ est libre : soit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E$, càd

$$\lambda_1(e_1+e_2+e_3) + \lambda_2(2e_1 - e_2 + 2e_3) + \lambda_3(e_1 - 2e_2 - e_3) = 0_E$$

On rassemble les coefficients de e_1, e_2, e_3 :

$$(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)e_1 + (\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)e_2 + (\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)e_3 = 0_E ;$$

Puisque $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base et donc libre, l'unique combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 égale à 0_E est celle ayant tous les coefficients 0.

D'où
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On résout ce système par la méthode des pivots de Gauss :

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -(L_2 - L_1)/3 \\ L_3 \leftarrow -(L_3 - L_1)/2 \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$.

Ainsi $\mathcal{F}_3$ est libre et donc une base de E, car $\mathrm{card}(\mathcal{F}_3) = 3 = \dim E$