Exercice 4 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1-i)e_1 + ie_2 + (1+i)e_3, \qquad u_2 = -e_1 + e_2 + 3e_3, \qquad u_3 = (1-i)e_1 + ie_2 + ie_3.$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. On montre que $\mathcal{B}$ est génératrice, donc une base de E, car $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim E$.

METHODE 1 On montre que tout $u \in E$ s'écrit comme comb. linéaire de u_1, u_2, u_3.
Or, (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Donc tout $u \in E$ s'écrit comme $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ pour $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. On montre qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $u = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \lambda_3u_3$ càd

$$\lambda_1\left[(1-i)e_1 + ie_2 + (1+i)e_3\right] + \lambda_2\left[-e_1 + e_2 + 3e_3\right] + \lambda_3\left[(1-i)e_1 + ie_2 + ie_3\right] = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base (e_1, e_2, e_3) implique le système linéaire suivant en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} (1-i)\lambda_1 - \lambda_2 + (1-i)\lambda_3 = a_1 \\ i\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 = a_2 \\ (1+i)\lambda_1 + 3\lambda_2 + i\lambda_3 = a_3 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_1 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a_1 + a_2 \\ i\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 = a_2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = a_1 + a_3 \end{cases}$$

Méthode de Gauss :

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a_1 + a_2 \\ \lambda_2 = -ia_1 + (1-i)a_2 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = -a_1 - 2a_2 + a_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow -(L_3 - 2L_2)]{} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a_1 + a_2 \\ \lambda_2 = -ia_1 + (1-i)a_2 \\ \lambda_3 = (1-2i)a_1 + 2(2-i)a_2 - a_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_3]{} \begin{cases} \lambda_1 = 2ia_1 + (-3+2i)a_2 + a_3 \\ \lambda_2 = -ia_1 + (1-i)a_2 \\ \lambda_3 = (1-2i)a_1 + 2(2-i)a_2 - a_3 \end{cases}$$

Ainsi : tout $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ s'écrit comme

$$u = \left[2ia_1 + (-3+2i)a_2 + a_3\right]u_1 + \left[-ia_1 + (1-i)a_2\right]u_2 + \left[(1-2i)a_1 + 2(2-i)a_2 - a_3\right]u_3$$

(2) Si $v = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$, alors $\begin{cases} a_1 = 1+i \\ a_2 = 2 \\ a_3 = i \end{cases}$ on obtient

$\lambda_1 = 2i(1+i) + (-3+2i)2 + i = 2i - 2 - 6 + 4i + i = 7i - 8$

$\lambda_2 = -i(1+i) + (1-i)2 = -i + 1 + 2 - 2i = 3 - 3i$

$\lambda_3 = (1-2i)(1+i) + 2(2-i) \cdot 2 - i = 1 + 2 - i + 8 - 4i - i = 11 - 6i$

d'où $v = (7i-8)u_1 + (3-3i)u_2 + (11-6i)u_3$

<u>METHODE 2</u> On montre que $e_1, e_2, e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, ce qui implique que $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, où $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ car $\mathcal{B} \subset E$.

Par inspection

$e_3 = u_1 - u_3$ d'où $u_2 - 3e_3 = -e_1 + e_2$

$u_3 - ie_3 = (1-i)e_1 + ie_2$

$(u_3 - ie_3) - i(u_2 - 3e_3) = (1-i)e_1 + ie_2 + ie_1 - ie_2 = e_1$

et $e_2 = (u_2 - 3e_3) + e_1$

Ainsi :

$e_1 = (u_3 - ie_3) - iu_2 + 3ie_3 = u_3 - iu_2 + 2ie_3 = u_3 - iu_2 + 2i(u_1 - u_3) = 2iu_1 - iu_2 + (1-2i)u_3$

$e_2 = u_2 - 3(u_1 - u_3) + 2iu_1 - iu_2 + (1-2i)u_3 = (2i-3)u_1 + (1-i)u_2 + (4-2i)u_3$

$e_3 = u_1 - u_3$

ce qui montre $e_1, e_2, e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$

(2) On a $v = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$

$= (1+i)[2iu_1 - iu_2 + (1-2i)u_3] + 2[(2i-3)u_1 + (1-i)u_2 + (4-2i)u_3] + i(u_1 - u_3)$

$= (2i - 2 + 4i - 6 + i)u_1 + (-i + 1 + 2 - 2i)u_2 + (1 + 2 - i + 8 - 4i - i)u_3$

$= (7i - 8)u_1 + (3 - 3i)u_2 + (11 - 6i)u_3$