Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, soit F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+2y-5z-t &= 0 \\ x-y+z+2t &= 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base de F et déterminer la dimension de F.
2. Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(0,3,1,1)$, $v=(1,-1,1,1)$ et $w=(2,0,1,-1)$. Déterminer une base et la dimension de G.
3. Déterminer un système d'équations de G.
4. Déterminer une base et la dimension de $F\cap G$.
5. En déduire la dimension $F+G$ puis $F+G$.

1. $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ;\ \begin{cases} x+2y-5z-t=0 \\ x-y+z+2t=0 \end{cases}\right\}$

On résout (S) par la méthode de Gauss

$$\begin{cases} x+y-5z-t=0 \\ x-y+z+2t=0 \end{cases} \xrightarrow[L_1\leftarrow \frac{L_1-L_2}{3}]{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{cases} x-y+z+2t=0 \\ \quad -2z-t=0 \end{cases} \xrightarrow[L_1\leftarrow L_1+L_2]{} \begin{cases} x \quad -z+t=0 \\ y-2z-t=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x=z-t \\ y=2z+t \end{cases}$$

$F=\{(z-t,2z+t,z,t)\in\mathbb{R}^4 ;\ z,t\in\mathbb{R}\}=\{z\overbrace{(1,2,1,0)}^{a}+t\overbrace{(-1,1,0,1)}^{b} ;\ z,t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_F)$ où $\mathcal{B}_F=\{a,b\}$

$\mathcal{B}_F$ est, par construction, génératrice de F. $\mathcal{B}_F$ est libre, car famille de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F. Par conséquent, $\dim F=\mathrm{card}(\mathcal{B}_F)=2$.

2. $G=\mathrm{Vect}(u,v,w)$. On note $\mathcal{B}_G=\{u,v,w\}$. $\mathcal{B}_G$ est, par définition, génératrice de G.
A vérifier : $\mathcal{B}_G$ est libre, càd que la solution unique de $\lambda u+\mu v+\nu w=0_{\mathbb{R}^4}$ est $\lambda=\mu=\nu=0$.

$\lambda u+\mu v+\nu w=0_{\mathbb{R}^4} \iff \lambda(0,3,1,1)+\mu(1,-1,1,1)+\nu(2,0,1,-1)=(0,0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} \quad +\mu+2\nu=0 \\ 3\lambda-\mu \quad =0 \\ \lambda+\mu+\nu=0 \\ \lambda+\mu-\nu=0 \end{cases} \xrightarrow[L_4\leftarrow \frac{L_3-L_4}{2}]{L_3\leftarrow \frac{L_3+L_4}{2}} \begin{cases} \mu=0 \\ \\ \lambda+\mu=0 \to \lambda=0 \\ \nu=0 \end{cases}$$

d'où $\lambda=\mu=\nu=0$, la famille $\mathcal{B}_G$ est libre et donc une base de G
Ainsi : $\dim G=\mathrm{card}(\mathcal{B}_G)=3$

3. On cherche les conditions sur $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ afin que $(x,y,z,t)\in G=\mathrm{Vect}(u,v,w)$ càd afin que l'équation $\lambda u+\mu v+\nu w=(x,y,z,t)$ possède (au moins) une solution λ,μ,ν. L'équation correspond au système suivant :

$$\begin{cases} \mu+2\nu = x \\ 3\lambda-\mu = y \\ \lambda+\mu+\nu = z \\ \lambda+\mu-\nu = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda+\mu+\nu = z \\ \lambda+\mu-\nu = t \\ 3\lambda-\mu = y \\ \mu+2\nu = x \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow -(L_3-3L_1)]{L_2 \leftarrow -(L_2-L_1)} \begin{cases} \lambda+\mu+\nu = z \\ 2\nu = z-t \\ 4\mu+3\nu = 3z-y \\ \mu+2\nu = x \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow \frac{L_3-4L_4}{-5} \\ L_4 \leftarrow L_2}]{L_2 \leftarrow L_4}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\nu = z \\ \mu+2\nu = x \\ \nu = \frac{1}{5}(4x+y-3z) \\ 2\nu = z-t \end{cases} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4-2L_3} \begin{cases} \lambda+\mu+\nu = z \\ \mu+2\nu = x \\ \nu = \frac{1}{5}(4x+y-3z) \\ \boxed{0 = z-t-\frac{2}{5}(4x+y-3z)} \end{cases}$$

L'équation $0 = z-t-\frac{2}{5}(4x+y-3z)$ donne la condition afin que (x,y,z,t) soit dans $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. C'est l'équation qui décrit G :

$$0 = 5z-5t-8x-2y+6z \text{ , càd } \quad 8x+2y-11z+5t=0$$

4. $F\cap G$ est le sev de $\mathbb{R}^4$ formé par les éléments (x,y,z,t) qui sont solutions de

$$(S') \begin{cases} x = z-t \\ y = 2z+t \\ 8x+2y-11z+5t=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y - 2z - t = 0 \\ z - t = 0 \rightarrow z = t \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1+L_4} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 - 2L_2$

L_3	8	2	-11	5
$-8L_1$	-8		8	-8
$-2L_2$		-2	4	2
	0	0	1	-1

$F\cap G = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ; \text{ solutions de } (S')\} = \{(0,3t,t,t)\in\mathbb{R}^4 ; t\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,3,1,1))$

$\{(0,3,1,1)\}$ est une base de $F\cap G$, car génératrice et formée par un vecteur $\neq 0_{\mathbb{R}^4}$

5. La formule de Grassmann donne

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G) = 2+3-1 = 4$$

$F+G$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ ayant dimension 4, d'où $F+G = \mathbb{R}^4$