Exercice 7 Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $(2,2)$ à coefficients réels. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, {}^tA = A\}$.

On rappelle que la transposée ${}^tA$ d'une matrice $m\times n$ A est la matrice $n\times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a donc ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Par conséquent :

$$A = {}^tA \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \iff b = c \quad \text{(pas de conditions sur } a \text{ et } d\text{)}$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},\ a, b, d \in \mathbb{R}$$

On note $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\, {}^tA = A\}$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in F$ on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}}$$

et toute matrice de cette forme est dans F, d'où

$$F = \{a E_{11} + b E + d E_{22}\,;\, a, b, d \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(E_{11}, E, E_{22})$$

On note $\mathcal{B} = \{E_{11}, E, E_{22}\}$. On vient de vérifier que $\mathcal{B}$ est est génératrice de F.

On montre que $\mathcal{B}$ est libre : si $\lambda E_{11} + \mu E + \nu E_{22} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, alors $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deux matrices sont égales si et seulement si leurs entrées de même indices sont égales. Ainsi $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de F.