Exercice 9 Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par les systèmes d'équations suivants :

$$E \ : \ \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad , \quad F \ : \ \begin{cases} x-2y-t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E+F$.

$E\cap F$ est le sev de $\mathbb{R}^4$ formé par les éléments (x,y,z,t) qui sont à la fois dans E et dans F. Ils sont les solutions du système formé par les équations définissant E et les équations définissant F, càd

$$E\cap F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x-2y-t=0 \\ x-t=0 \end{cases} \quad (S) \right\}$$

Puisqu'on aura besoin de décrire E et F pour déterminer $E+F$, on commence par résoudre les systèmes pour E et pour F séparemment.

Pour E : $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow -(L_2-2L_1)}{\sim} \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3y+z+2t=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim} \begin{cases} x-2y-t=0 \\ 3y+z+2t=0 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrrrr} L_2 : & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2L_1 : & -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}$$

(deux pivots, qui permettront de résoudre le système; remarquer que la 1e équation est une des équations de F)

Pour F : $\begin{cases} x-2y-t=0 \\ x-t=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow -\frac{(L_1-L_2)}{2}}{\sim} \begin{cases} y=0 \\ x-t=0 \end{cases}$

Pour résoudre (S) : (S) est équivalent à $\begin{cases} 3y+z+2t=0 \\ y=0 \\ x-t=0 \end{cases} \sim \begin{cases} z=-2t \\ y=0 \\ x=t \end{cases}$

Ainsi $E\cap F = \{(t,0,-2t,t) \,;\, t\in\mathbb{R}\} = \{t(1,0,-2,1) \,;\, t\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,0,-2,1)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1,0,-2,1)$. Une base de $E\cap F$ est $\{(1,0,-2,1)\}$.

Pour déterminer $E+F$, on cherche d'abord E et F. La résolutions des systèmes ci-dessus donne :

$E=\{(2y+t,y,-3y-2t,t);\ y,t\in\mathbb{R}\}=\{y\underbrace{(2,1,-3,0)}_{u_1}+t\underbrace{(1,0,-2,1)}_{u_2};\ y,t\in\mathbb{R}\}$

$\quad=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$

$\{u_1,u_2\}$ est donc une famille génératrice de E. Elle est libre, car c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires.. Ainsi $\{u_1,u_2\}$ est une base de E et $\dim E=\mathrm{card}(\{u_1,u_2\})=2$.

$F=\{(t,0,z,t);\ z,t\in\mathbb{R}\}=\{z\underbrace{(0,0,1,0)}_{v_1}+t\underbrace{(1,0,0,1)}_{v_2};\ z,t\in\mathbb{R}\}$

$\quad=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$

$\{v_1,v_2\}$ est donc une famille génératrice de F. Elle est libre, car c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi $\{v_1,v_2\}$ est une base de F et $\dim F=2$.

On cherche une base de $F+G$:

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=3$.

Une famille libre de 3 vecteurs de $F+G$ est donc une base de $F+G$.

METHODE 1 On remarque que u_2 est la base de $E\cap F$ qu'on avait trouvé.

Donc $\{u_1,u_2\}$ est une base de E qui complète la base $\{u_2\}$ de $E\cap F$.

La preuve de la formule de Grassmann montre que si on complète $\{u_2\}$ en une base $\{u_2,f\}$ de F, alors $\{u_1,u_2,f\}$ est une base de $E+F$. On peut choisir f dans la base trouvée pour F; v_1 ou v_2. Aucun de v_1 et v_2 est colinéaire avec u_2. Donc l'un ou l'autre peut être choisit comme f. Par exemple, on choisit $f=v_1$. Alors $\{u_2,v_1\}$ est une base de F (car deux vecteurs non colinéaires de F et $\dim F=2$). La preuve de la formule de Grassmann garantit que $\{u_1,u_2,v_1\}$ est une base de $E+F$.

METHODE 2 On sait (lemme 2) que si $\mathcal{F}$ est libre et $\mathcal{F}\cup\{u\}$ est liée, alors $u\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Prenons $\mathcal{F}=\{v_1,v_2\}$, qui est libre, et $u=u_1$. Alors $u_1\notin\mathrm{Vect}(\mathcal{F})=F$ (on a déterminé $E\cap F$ et $u_1\notin E\cap F$; ou bien $F\subset\{y=0\}$ et la

2^e coordonnée de u_1 n'est pas 0). Ainsi $F\cup\{u_1\} = \{v_1, v_2, u_1\}$ doit être libre, et donc une base de $E+F$.

METHODE 3 On choisit trois éléments dans $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ et on montre que la famille choisie est libre. Pour ces vecteurs, l'unique choix qui ne marche pas est $\{\ \ , v_1, v_2\}$, car $u_2 = v_2 - 2v_1$, comme on le voit directement.

METHODE 4 Si $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ est une base de F, alors $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une famille génératrice de $E+F$.(*) Une sous-famille libre maximale de $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ sera une base de $E+F$. Pour choisir la sous-famille libre maximale, il suffit de considérer le système associé à l'équation vectorielle
$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_4 = 0_E$. On applique la méthode de Gauss. Les vecteurs dont les coefficients sont des variables avec les pivots forment une sous-famille libre maximale. [Cette méthode a été détaillée dans la solution de l'ex. 12. partie 2.]

AUTRES METHODES : il y en plein, comme dans la plupart des exercices. Ci-dessus on a déterminé une base de $E+F$ en tant que famille libre de 3 vecteurs de $E\cup F \subset E+F$, sachant que $\dim(E+F) = 3$. On pourrait chercher une famille génératrice de $E+F$ qui possède 3 éléments. Par exemple, $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est génératrice de $E+F$ et, puisque $u_2 = v_2 - 2v_1$, $\{u_1, v_1, v_2\}$ l'est aussi.

(*) Si $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ est une base de F, alors $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$ est une famille génératrice de $E+F$. Ceci peut être vu par exemple directement : tout $u \in E+F$ est de la forme $u = u_E + u_F$ avec $u_E \in E$ et $u_F \in F$. Si on écrit u_E comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_E$ et u_F comme comb. linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_F$, alors $u = u_E + u_F$ sera comb. linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_E \cup \mathcal{B}_F$. En fait, cette preuve n'utilise pas le fait que $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases, juste qu'elles sont génératrices de E et F, respectivement. On obtient donc la propriété suivante : si $\mathcal{G}_E$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{G}_F$ est génératrice de F, alors $\mathcal{G}_E \cup \mathcal{G}_F$ est une famille génératrice de $E+F$.