Université de Lorraine - Metz *L1 mathématiques*
2e semestre 2017-2018

Partiel d'algèbre
Samedi 24 mars 2018, 8h-10h

N.B. Calculatrices, documents et téléphones portables interdits.

Toutes les affirmations doivent être **soigneusement justifiées**. *La notation tiendra compte de la précision et de la rigueur des arguments.*

Exercice 1. (Question de cours, 2 points)

(a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Rappeler la définition de $F + G$.

(b) Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2. (14 points) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 2, 3, -1),\ u_2 = (-1, 1, -1, 1),\ u_3 = (0, 1, 0, 1),\ u_4 = (-1, 5, 1, 2).$$

a) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

b) Est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?

c) Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Déterminer une base de F, et en déduire la dimension de F.

d) Déterminer un supplémentaire de F.

e) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$. Déterminer une base de G, et la dimension de G.

f) Déterminer la dimension de $F + G$, et en déduire la dimension de $F \cap G$.

g) Trouver une base de $F \cap G$.

Exercice 3. (6 points) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 3. Soit $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base de F, et la dimension de F.

c) Soit $G = \mathbb{R}_1[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 1. Montrer que $E = F \oplus G$.

Bon travail !